

Ziel

Um die Mathematik verständlich zu lernen und lehren, stehen im Unterricht verschiedene Mat(h)erialien im Einsatz. Diese *Gegenstände* sind zentrale Hilfsmittel, welche zur Visualisierung dienen, zum Zahlenverständnis beitragen und schliesslich zum Rechnen helfen. Gleichermassen können diese aber auch verschiedene Handlungen (unter-)stützen und die Mathematik schliesslich greifbar und erlebbar machen. In der Literatur finden sich verschiedene Bezeichnungen: Arbeitsmittel, Arbeitsmaterialien, didaktisches Material, Veranschaulichungen, Anschauungsmittel, Darstellungsmittel usw.. In diesem Dokument verwenden wir in Anlehnung an den Heilpädagogischen Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch *Arbeitsmittel* und *Veranschaulichungen*.

Arbeitsmittel und Veranschaulichungen¹

(Nicht nur) Für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf wird häufig handelnder und anschaulicher Unterricht bzw. handelnde und anschauliche Förderung gefordert. Im Mathematikunterricht bedeutet «handeln» oft, dass für das Lösen von Rechenaufgaben über lange Zeit Veranschaulichungen und Arbeitsmaterialien verwendet werden. Es wird davon ausgegangen, dass das Abstrakte für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf besonders schwierig und erst nach ausgiebigem Handeln verstehbar sei. Handlungen und Umgang mit Materialien allein führen aber nicht automatisch zum Verständnis und zum Aufbau von Vorstellungsbildern. Das allgemeine Prinzip eines Sachverhaltes kann oft erst in der abstrakten formalen Darstellung erkannt werden. Ein Beispiel: Die Regel «Addiert man zu einer Zahl 100, so bleiben die Zehner und die Einer unverändert» wird erst als solche sichtbar, wenn nicht nur viele Beispiele handelnd ausgeführt werden, sondern wenn diese auch formal dargestellt werden, wenn über die Ergebnisse diskutiert wird und die Beziehung zwischen Handlung und formaler Darstellung explizit thematisiert wird. Alleiniges Handeln genügt ebenso wenig wie das rein formale Lösen von Aufgaben, um mathematisches Verständnis aufzubauen. Dazu braucht es mehr, nämlich den Einsatz von geeigneten Veranschaulichungen und Arbeitsmaterialien, welche die Abstraktion und die Loslösung vom Material ermöglichen.

Materialien zum Anschauen und Anfassen vermitteln dann Einsichten, wenn sie

- den zentralen mathematischen Inhalt des jeweiligen Lerngegenstandes abbilden,
- den Aufbau von Vorstellungen ermöglichen,
- zur Loslösung ermuntern.

Grundsätzliches dazu wird im Folgenden ausgeführt.

Hervorhebung eines zentralen mathematischen Inhalts durch adäquate Veranschaulichungen

Nicht jede Veranschaulichung bzw. jedes Arbeitsmaterial eignet sich für jedes mathematische Thema gleich gut. Veranschaulichungen bzw. Arbeitsmaterialien müssen den jeweils zentralen mathematischen Inhalt abbilden. Eine einzige Veranschaulichung oder ein einziges Arbeitsmaterial kann nicht das ganze Spektrum eines Begriffes oder einer Operation abdecken. Meist wird nur ein Aspekt hervorgehoben:

- Das Hunderter- und das Tausenderfeld betonen den kardinalen Zahlaspekt.
- Die Zahlenreihe und der Zahlenstrahl betonen den ordinalen Zahlaspekt.
- Das Hunderter- und das Tausenderfeld verdeutlichen das Kommutativ- und das Distributivgesetz der Multiplikation.
- Das Hunderter- und das Tausenderfeld betonen einerseits die Beziehungen zwischen den Malaufgaben innerhalb einer Reihe (insbesondere das Ableiten von den Merkaufgaben) und andererseits die Beziehungen zwischen den Malreihen (z.B. zwischen Zweier- und Viererreihe).

Ungeeignete oder nicht passende Materialien können dazu führen, dass der Aufbau der mathematischen Vorstellung nicht stattfindet oder erschwert wird. Das folgende Beispiel soll dies veranschaulichen:

Der ausgefüllte Zahlenstrahl eignet sich z.B. für die Darstellung des ordinalen Zahlaspektes, für Grössenbeziehungen und Analogien (50 liegt in der Mitte zwischen 0 und 100, 500 in der Mitte zwischen 0 und 1000). Für das Lösen von Ergänzungsaufgaben wie z.B. $753 + _ = 1000$ eignet er sich weniger, denn einerseits verleitet er zum Abzählen in Einerschritten, andererseits kann er verwirren, weil er zwischen 753 und 1000 zwar viele Zahlen präsentiert, nicht aber

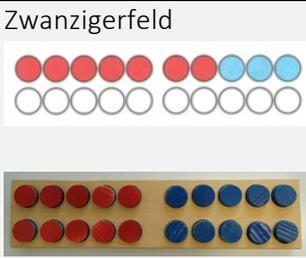
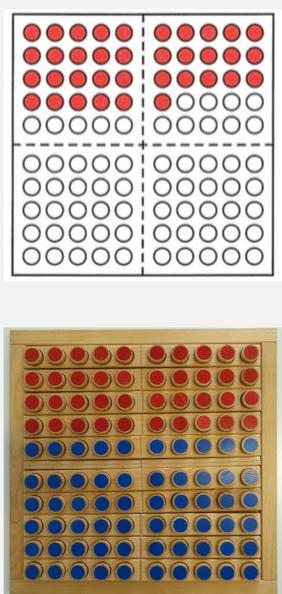
¹ «Arbeitsmittel und Veranschaulichungen» sowie die beiden nachfolgenden Unterkapitel inkl. der Tabelle entstammen dem Heilpädagogischen Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 3 S.39/40, Schmassmann M. & Moser-Opitz E., (2008) Klett & Balmer, Zug

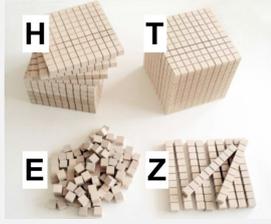
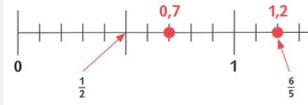
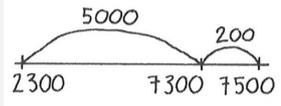
das Ergebnis 247. Geeignet für das Ergänzen sind hingegen das Tausenderfeld oder das Material zum Dezimalsystem sowie die Protokollierung am Rechenstrich oder an der Stellentafel.

Aus diesem Grund müssen für die Zahlenraumschliessung und den Aufbau arithmetischer Gesamtstrukturen mehrere Veranschaulichungen verwendet werden.

Veranschaulichungen und Arbeitsmaterialien zum Dezimalsystem

Insbesondere beim Aufbau des Dezimalsystems ist darauf zu achten, dass die verschiedenen Zahlaspekte berücksichtigt und die verschiedenen Veranschaulichungen dementsprechend verwendet werden. Das Hunderter- und Tausenderfeld sowie das Material zum Dezimalsystem sind die zentralen Materialien für die Veranschaulichung des Zahlenraumes von arithmetischen Operationen. Als Protokollformen für die Rechenstrategien werden der Rechenstrich, die Stellentafel, das Malkreuz oder gezeichnete Einheiten (Quadrate für Hunderter, Striche für Zehner, Punkte für Einer) verwendet. Die nachfolgende Übersicht zeigt, welche Veranschaulichungen bzw. Arbeitsmittel für welchen Zweck am besten geeignet sind:

Arbeitsmaterialien/ Protokollformen	Zahlaspekt	Verwendung
<p>Zwanzigerfeld</p> 	Kardinal	Zahldarstellung und Zahlauffassung im Zahlenraum bis 20, Zahlen zeigen («Kraft der Fünf»), Darstellung von Additions- und Subtraktionsstrategien.
<p>Hunderter- und Tausenderfeld</p> 	Kardinal	Zahlaufbau aus Hundertern (ganze Seiten), Zehnern (ganze Zeilen oder Spalten) und Einern (einzelne Punkte), Entwicklung der Grössenvorstellung im Zahlenraum bis 100 bzw. 1000, gesamthaftes Zeigen von Anzahlen, strukturierte Erfassung und Darstellung von Zahlen bzw. Anzahlen, Zählen in Schritten, Zerlegen des Hunderters bzw. Tausenders, Ergänzen auf Zehnerzahlen, Ergänzen auf 100 bzw. 1000. Eignet sich gut, um (grosse) Anzahlen gesamthaft darzustellen und zur Veranschaulichung des Distributivgesetzes.
<p>Hundertertafel und Tausenderbuch</p> 	ordinal, positional, (Betonung der Position jeder Zahl)	Gesetzmässigkeiten des Zahlaufbaus und der Zahlenschreibweise im Zehnersystem, Orientierung im Hunderter- und Tausenderraum, Entdecken von Strukturen und Zahlenmustern. Die Hundertertafel und das Tausenderbuch sollen nicht als Rechenhilfsmittel verwendet werden, da sie zum zählenden Rechnen verleiten können.

<p>Material zum Dezimalsystem</p> 	<p>kardinal, Zahlaufbau aus dezimalen Einheiten</p>	<p>Bündeln und Entbündeln, Zahldarstellung mit dezimalen Einheiten, multiplikativer Zusammenhang der Einheiten (ein Zehner ist zehnmal so viel wie ein Einer; ein Hunderter ist zehnmal so viel wie ein Zehner usw., Zehner-Einmaleins, Stelleneinmaleins), Rechenstrategien ausführen.</p>												
<p>Zahlenreihe (Zwanziger bzw. Hunderterreihe)</p> 	<p>Ordinal</p>	<p>Rangordnung der Zahlen, Entwicklung von Zählstrategien (Übergänge über den Zehner, Zählen in Schritten). Die Zahlenreihe soll nicht als Rechenhilfsmittel verwendet werden, da sie zum zählenden Rechnen verleiten kann.</p>												
<p>Zahlenstrahl (Hunderter-, Tausender-, Million- bzw. Dezimalstrahl)</p> 	<p>Ordinal</p>	<p>Dezimale Grössenbeziehungen (z.B. ein Zehner ist zehnmal so viel wie ein Einer), genaues Platzieren und Ablesen von Zahlen, Zählen in Schritten, Erarbeiten der Übergänge über die Zehner; Hunderter usw., Bestimmen der Nachbarzehner; Nachbarhunderter. Der Zahlenstrahl soll nicht als Rechenhilfsmittel verwendet werden, da er zum zählenden Rechnen verleiten kann.</p>												
<p>Rechenstrich</p> 	<p>Ordinal</p>	<p>Anordnen von Zahlen gemäss ihrer Abfolge, Darstellen bzw. Protokollieren von Abläufen (z.B. Zählen in Schritten, Additions-, Ergänzungs- und Subtraktionsstrategien).</p>												
<p>Stellentafel</p> <table border="1" data-bbox="124 1124 432 1205"> <thead> <tr> <th>Hunderter</th> <th>Zehner</th> <th>Einer</th> <th>Zehntel</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>H</td> <td>Z</td> <td>E</td> <td>z</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>7</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	H	Z	E	z	6	2	7	3	<p>stellengerechte Notation</p>	<p>Übersetzung von der (Zehner-)Bündelung mit konkreten Materialien in die formale Schreibweise im Stellenwertsystem und umgekehrt. Ausführen und Darstellen von Rechenstrategien.</p>
Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel											
H	Z	E	z											
6	2	7	3											

Hinweis: Mit Bildern aus dem Lehrmittel, bzw. Begleitmaterial zum Schweizer Zahlenbuch ergänzt.

Mathematik-Lehrfilme zum handelnden Erarbeiten der halbschriftlichen Grundoperationen

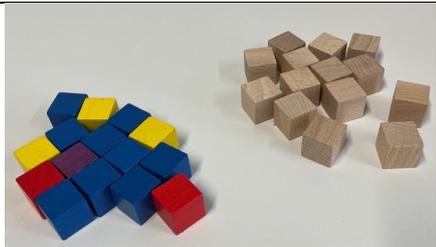
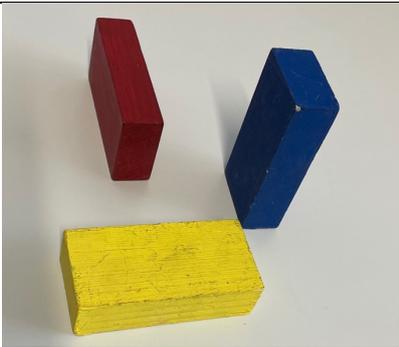
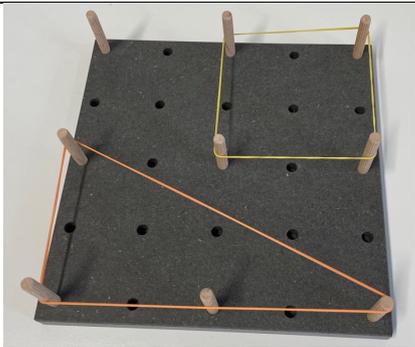
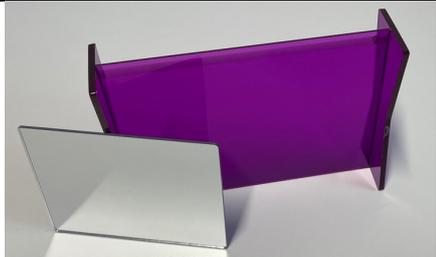
Zum handelnden Erarbeiten der halbschriftlichen Rechenstrategien sind unter folgendem Link Lehrfilme zu allen Grundoperationen vorhanden:

<https://tube.switch.ch/channels/80e3a944>

Bei der Addition sind die Handlungen der Strategien Stellenwerte extra und schrittweise vorhanden, bei der Subtraktion die Strategie schrittweise. Die Multiplikation wird handelnd in der Stellentafel mit Multiplikator einstellig und zweistellig gezeigt sowie am Malkreuz.

Bei Addition und Subtraktion wird mit dem Dienes-Material gehandelt, bei Multiplikation und Division mit dem Markenspiel. Anstelle des Markenspiels kann auch das Dienes-Material verwendet werden.

Weitere Materialien für den Kompetenzbereich Form & Raum

		
Holzwürfel	Quader	Geobrett
		
Spiegel / Transparentsiegel	Tangram	Patternblocks ²

Weitere Materialien für den Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall: Fokus Grössen

		
Längenmasse ³	Hohlmasse ²	Gewichtsmasse ²

Weitere Materialien für den Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall: Fokus Daten und Zufall


Spielwürfel

² Bildquelle: <https://mathe-werkstatt.com/offenburg/lernmaterialien>

³ Die Darstellung ist an dieser Stelle nicht abschliessend. Abgebildet sind standardisierte und nichtstandardisierte Messinstrumente.

Einsatz digitaler Medien

Im Zuge der Digitalisierung gilt es, auch digitale Medien im Unterricht als Hilfsmittel einzusetzen. Das Smartphone oder Tablet bringen von Haus aus bereits grundlegende Funktionen mit, welche im Mathematikunterricht sinnvoll eingesetzt werden können. Die Kamera, mit welcher Ergebnisse festgehalten werden, um diese z.B. im (digitalen) Merkheft aufzunehmen, das Mikrofon, um Erkenntnisse, Zusammenfassungen, Überlegungen in eigenen Worten wiederzugeben, die Videokamera, um Argumentationen und Gedankengänge auch in bewegtem Bild darstellen zu können. Im Weiteren können auch Stop-Motion-Filme, Book-Creator und Anderes den Mathematikunterricht ergänzen und bereichern.



Mathe-Werk-Statt

Im Projekt der Mathe-Werk-Statt werden 30 ausgewählten Lernmaterialien beschrieben, welche die Grundlage für erfolgreiches Mathematiklernen in der Primarschule legen:

«Um Mathematik nachhaltig zu verstehen, benötigt man fundamentale Vorstellungen, deren Ausbildung besonders in der Grundschule durch den Einsatz von didaktisch reflektiertem Lernmaterial gewinnbringend vorangetrieben werden kann.

Es handelt sich hierbei um den Aufbau von Grundvorstellungen. Diese werden als mentale Werkzeuge angesehen, die die Übersetzung mathematischer Inhalte zwischen symbolischer, bildlicher und handelnder Ebene ermöglichen. Die nachfolgend aufgezeigten Materialien bieten einen handlungsorientierten Zugang und übernehmen die Brückenfunktion im Aufbau dieser Grundvorstellungen.

Somit initiieren diese Lernmaterialien konkrete Handlungen, aus denen sich mentale Vorstellungen entwickeln, die ein späteres geistiges Operieren ohne Rückgriff auf die konkrete Handlung als Ziel haben. Außerdem ermöglichen die Lernmaterialien eine Vielzahl an Differenzierungen, in dem sie je nach Ausgangslage des Kindes unterschiedliche Lernwege zugänglich machen.» <https://mathe-werkstatt.com/offenburg/lernmaterialien>