

Beispiel einer Produktebewertung mit einer reichhaltigen Aufgabe

(nach einem Beispiel in: Jundt, W & Nydegger, A (2018). Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten. Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG. Handbuch für Lehrpersonen (Print und digital, inkl. Klassenmaterial).

Würfelspiel

[7GH, 8GH, 9GH]

Aufgabenstellung

Du lernst ein Spiel kennen. Dieses ergänzt du und untersuchst es auf Gewinnchancen.

Die Spielregeln

- Alle Mitspielenden erhalten ein Set Bedingungskarten und legen diese offen vor sich hin.
- Wer dran ist, würfelt mit zwei Würfeln und schaut, ob die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen.
- Wenn die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen, wird diese auf den persönlichen „Gewinnstapel“ gelegt. Wenn die Bedingungen mehrerer Karten erfüllt sind, wird eine dieser Karten auf den Gewinnstapel gelegt.
- Wenn keine Bedingung erfüllt ist, wird eine beliebige Karte auf den „Abfallstapel“ gelegt.
- Dann ist der/die Nächste dran.
- Pro Spielrunde verringert sich somit die Zahl der noch offenen Karten für alle Spielenden um eine Karte.
- Das Spiel ist zu Ende, wenn keine Karten mehr offen auf dem Tisch liegen.
- Es gewinnt, wer am Ende am meisten Karten auf seinem Gewinnstapel hat.

Drei Bedingungskarten

Das sind drei Bedingungskarten:

Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.

Bsp. (3 / 5)

Es liegt genau eine Sechs.

Bsp. (5 / 6)

Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.

Bsp. (5 / 6)

Die Aufgaben

- Aufgabe A: Erfinde mindestens 5 weitere Bedingungskarten mit möglichen Ereignissen zu diesem Spiel. Ihre Trefferwahrscheinlichkeit soll grösser als 0 %, aber kleiner als 100 % sein. Keine Wahrscheinlichkeit soll mehrfach vorkommen.
- Aufgabe B: Du stellst Überlegungen zu Trefferwahrscheinlichkeiten und Gewinnstrategie an.

Beurteilungskriterien

			7		8		9	
			G	H	G	H	G	H
A	1	Eine deiner Bedingungen hat eine höhere Trefferwahrscheinlichkeit als die drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.						
	2	Eine deiner Bedingungen hat eine tiefere Trefferwahrscheinlichkeit als die drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.						
	3	Eine deiner Bedingungen hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 25%.						
	4	Du beschreibst eine Strategie, die dir hilft, möglichst viele Karten zu gewinnen.						
	5	Du widerlegst die Behauptungen, das Spiel sei (A) ein reines Glücksspiel, (B) ein reines Strategiespiel.						
	6	Du bestimmst bei fünf von dir entworfenen Bedingungskarten die Trefferwahrscheinlichkeit.						
	7	Du beschreibst, wie man durch Abzählen alle Trefferwahrscheinlichkeiten bestimmen kann.						
	8	Du begründest 3 Trefferwahrscheinlichkeiten (von vorgegebenen oder eigenen Karten) anders als durch direktes Abzählen.						

Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.

Empfehlung zur Bewertung

Genügend: 3 von 5 erfüllt

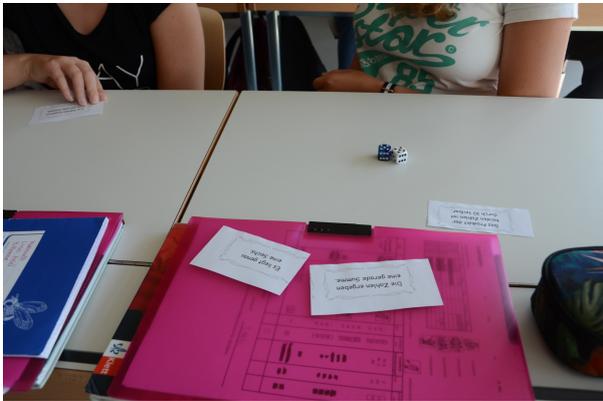
Gut: 4 von 5 erfüllt

Sehr gut: 5 von 5 erfüllt

	davon sind alle wählbar
	davon sind max. 3 wählbar
	davon sind max. 2 wählbar
	davon ist max. 1 wählbar

Inszenierung

Das Spiel lässt sich mit den drei vorgegebenen Karten versuchsweise zu zweit spielen. Es kann auch im Klassenverband simuliert werden. Dabei können Vermutungen zu Wahrscheinlichkeiten diskutiert – aber nicht bewiesen – werden. Als Beispiel einer Ergänzungskarte kann genannt werden: „Es liegt eine 3 oder eine 4“ (Wahrscheinlichkeit 55,555...%). Diese Karte darf dann aber nicht verwendet werden – aber nachgemacht (z.B. „1 oder 6“).



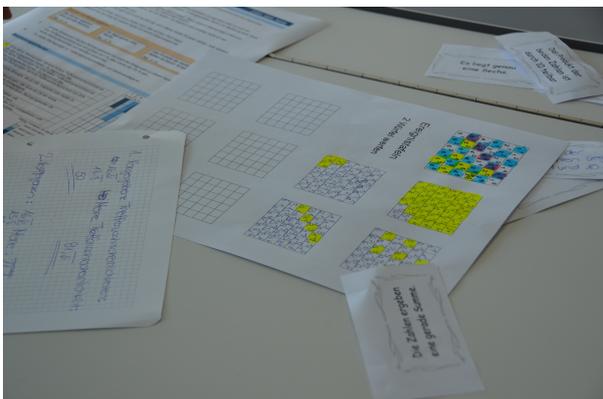
Am Beispiel eines Wurfs zweier Münzen kann die „Ereignismatrix“ besprochen werden, evtl. mit der Anregung, diese Darstellung für den Wurf zweier Würfeln zu adaptieren. In diesem Fall entwickeln die Schülerinnen und Schüler die 36er-Tafel selber.

Je nach Lernstand der Klasse kann es aber auch sinnvoll sein, die 36er-Tafel als Arbeitsblatt abzugeben.

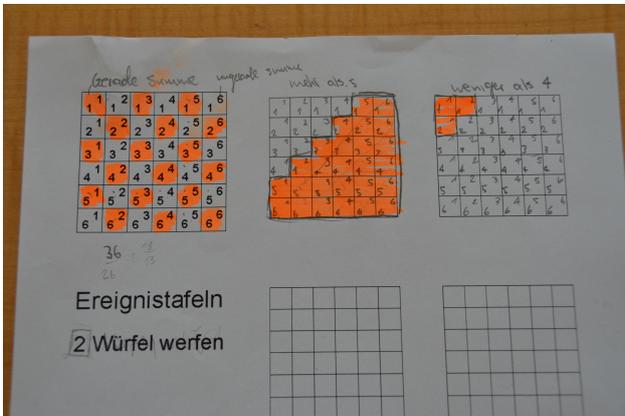
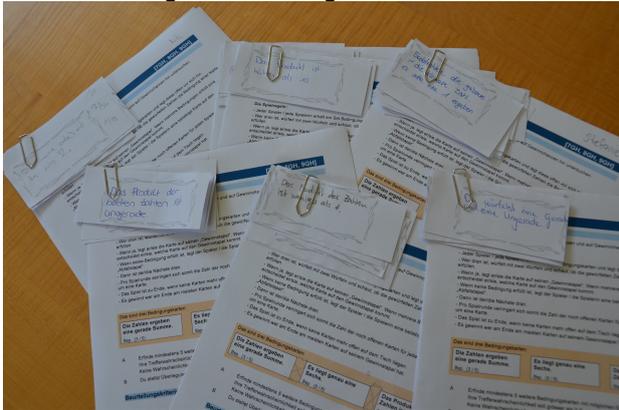
	K	Z
K	K	Z
Z	Z	K

Wichtig: Es ist mit zwei verschieden farbigen Würfeln zu spielen! So wird klar, dass $(3/4)$ und $(4/3)$ zwei verschiedene Ereignisse sind, dass es aber nur ein Ereignis $(5/5)$ gibt.

Daraufhin wählt jedes für sich selber nach den Vorgaben 5 Kriterien für sich aus und arbeitet während 45 - 60 Minuten daran.

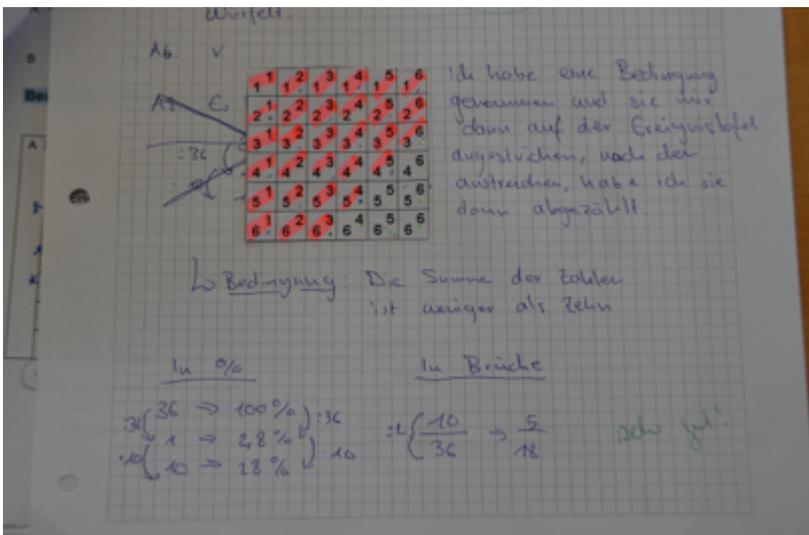


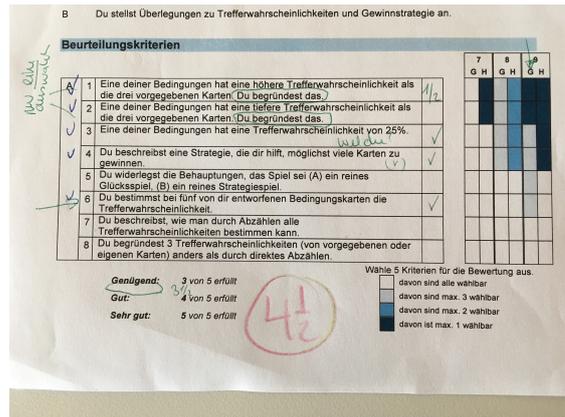
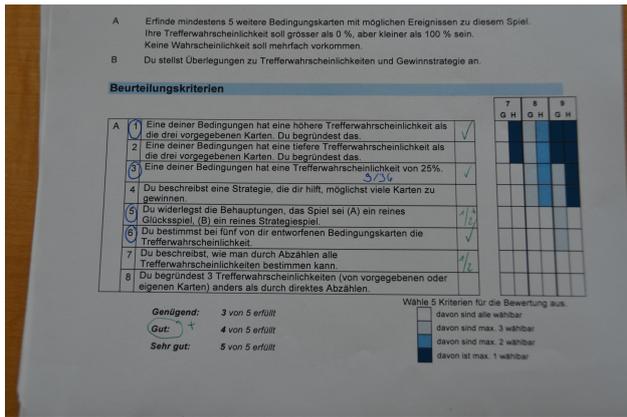
Variante: Nach einer Doppellektion alle Arbeiten einsammeln und durchlesen, bei jedem Schüler und jeder Schülerin einige Anmerkungen hineinschreiben.



Danach nochmals 30 Minuten Zeit zum Über- oder Weiterarbeiten geben.

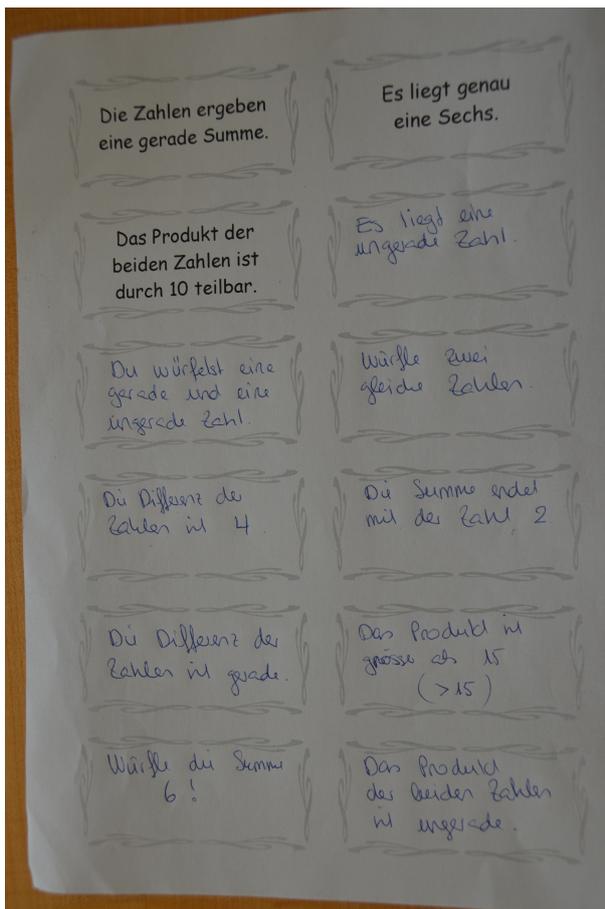
Daraufhin werden die Arbeiten anhand der vorgegebenen Punkte beurteilt. Es kann auch halbe Punkte geben, z.B. wenn bei drei (statt bei fünf) eigenen Bedingungskarten die Trefferwahrscheinlichkeit richtig berechnet wurde. Hilfe dazu bietet das Dokument im Anhang.



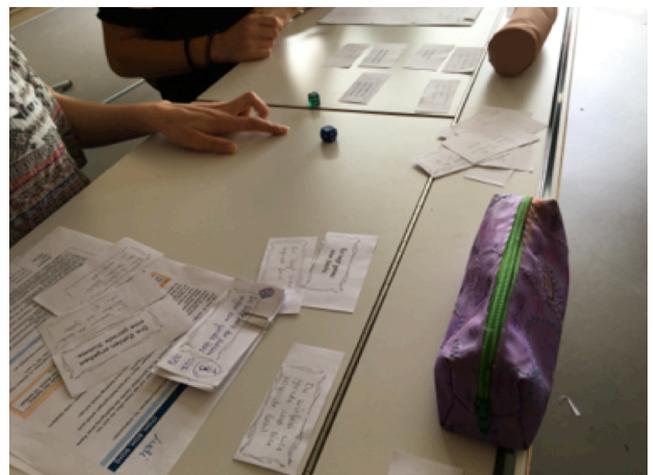


Ob dazu auch eine Note gesetzt wird bleibt der Lehrperson überlassen.

Und nun wird gespielt! Sei dies mit den eigenen Karten, oder die Lehrperson notiert von jeder Schülerin und jedem Schüler eine Karte und kopiert sie für alle. Entweder brauchen alle das ganze Kartenset oder aber sie wählen nacheinander eine aus bis alle aufgebraucht sind (und alle gleich viele Karten besitzen). Dazu können sie z.B. noch drei eigene



Bedingungskarten nehmen.



Bezug zum Lehrplan 21

		Kompetenzbereiche		
		Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Handlungsaspekte	Operieren und Benennen			3.A1
	Erforschen und Argumentieren			3.B2
	Mathematisieren und Darstellen			3.C1

MA3.A1 Begriffe und Symbole verstehen und verwenden.

MA3.B2 Sachsituationen zur Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen können.

MA3.C1 Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren können.

Zur Sache

Es geht darum, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen abzuschätzen und genau zu bestimmen. Auch sollen strategische Überlegungen formuliert werden.

Beim Würfeln mit 2 Würfeln sind 36 verschiedene Ereignisse möglich. Daher können die Trefferwahrscheinlichkeiten abgezählt werden. In einer 6x6-Matrix können die günstigen Fälle farbig markiert werden.

1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Beispiel: „Genau eine 6“ trifft in 10 von 36 Fällen zu. Das ergibt eine Wahrscheinlichkeit von 27.8%.

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Gerade Summe

						6
						6
						6
						6
						6
						6

Genau eine 6

Produkt durch 10 teilbar

Die 3 vorgegebenen und 9 weitere mögliche Bedingungen:		Wahrscheinlichkeit in %
1	Es liegen 2 Einsen.	2.777...
2	Die Zahlen ergeben die Summe 10.	8.333...
3	Beide Zahlen sind grösser als 4.	11.111...
4	Die Zahlen sind aufeinanderfolgend.	13.888...
5	Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.	16.666...
6	Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt.	25
7	Es liegt genau eine 6.	27.777...
8	Es liegt mindestens eine 6.	30.555...
9	Beide Zahlen sind grösser als 2.	44.444...
10	Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.	50
11	Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt.	75
12	Es liegt eine Zahl über 2.	88.888

Beispiele zur Erfüllung der Kriterien

- 1 Obige Beispiele 11 und 12
- 2 Obige Beispiele 1 bis 4
- 3 Obiges Beispiel 6. Oder: Beide Zahlen sind kleiner als 4.
- 4 Man erhöht die Gewinnchancen, wenn man
 - von seinen restlichen Karten diejenige mit der kleinsten Trefferwahrscheinlichkeit zum Abfall gibt,
 - von mehreren möglichen Karten diejenige mit der kleineren Trefferwahrscheinlichkeit einsteckt.
- 5 (A) Das Spiel ist kein reines Glücksspiel, weil es eine Strategie zur Verbesserung der Gewinnchancen gibt.
(B) Es ist kein reines Strategiespiel, weil die Würfelereignisse dem Zufall unterliegen.
- 6 Siehe Tabelle oben.
- 7 Man zählt (z.B. in einer 6X6-Tabelle) die günstigen Ereignisse. Bei 36 möglichen Ereignissen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, indem man die Anzahl günstiger Ereignisse durch 36 dividiert.
- 8 Bsp.1: Es liegen 2 Einsen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{6}$.
Bsp.5: Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.
5 kombiniert mit 2, 4 oder 6, mit je zwei Reihenfolgen ergibt 6 von 36 Fällen.
Bsp.6: Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt.
Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) ist nur die letzte günstig: $\frac{1}{4}$.
(Bsp.7: Es liegt genau eine 6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ von $\frac{5}{6}$ - $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.)
(Bsp.8: Es liegt mindestens eine 6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ von $\frac{5}{6}$.)
Bsp.9: Beide Zahlen sind grösser als 2. $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}$.
Bsp.10: Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.
Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind zwei günstig: $\frac{3}{4}$.
Bsp.11: Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt.
Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind drei günstig: $\frac{3}{4}$.
(Bsp.12: Es liegt eine Zahl über 2. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$.)

Die Beispiele 7, 8 und 12 sind auf dieser Stufe wohl nur durch Abzählen zugänglich.
Bei den Beispielen 2 bis 4 ist direktes Abzählen naheliegend.

Material

Vorbereitete Spielkarten (Kopiervorlage)

Umsetzung

Voraussetzungen

Eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit und Verständnis für diesbezügliche Angaben in %, zwischen 0% („unmöglich“) und 100% („sicher“).

Wenn es der Gewohnheit entspricht, können die Wahrscheinlichkeiten auch in Bruchform angegeben werden.

Zeitbedarf

Ca. 4 Lektionen (je nachdem, wie ausgiebig gespielt wird).

Umgang mit dem Produkt

Wenn das Spiel mit den selber entworfenen Karten gespielt wird, sind die Gewinnchancen nicht ausgeglichen, da nicht alle die gleichen Karten haben. Das kann zum Anlass genommen werden, die

Karten „nachzubessern“. Diese erfüllen dann aber vielleicht die obigen Bewertungskriterien nicht mehr. Darum ist es ratsam, die Erstellung des Produktes von der Wettkampf-Variante des Spiels – mit in der Klasse vereinheitlichten Karten – zu trennen.

Das Spiel kann später ergänzt und für weitere Untersuchungen eingesetzt werden:

- Weitere Bedingungskarten
- Spiel mit drei Würfeln
- Statistische Untersuchungen (Zufallsexperimente) und Vergleich der empirischen Ergebnisse mit kombinatorisch hergeleiteten Werten.