



# Umsetzung des Lehrplans 21 im Fachbereich Mathematik Handreichung für die Zyklen 1 bis 3

Version 2.0 – 2022

Kleine Anpassungen nach 4 Jahren Einführungen LP21

Bildungsdirektion des Kantons Bern



## Inhalt

|                                                                                                  |                                                                                               |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht</b>                                           | <b>5 Hinweise zum Zyklus 2</b>                                                                | <b>19</b> |
| 1.1 Fokus Mathematik: fachliche und überfachliche Kompetenzen fördern                            | 5.1 Formative Beurteilung: Grundkonzepte und Grundvorstellungen fördern                       | 19        |
| 1.2 Merkmale eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts                                   | 5.2 Hinweise auf ausgewählte reichhaltige Aufgaben im Schweizer Zahlenbuch 3, 4, 5, 6         | 21        |
| 1.3 Ausrichtung der Unterrichtsentwicklung im Fachbereich Mathematik                             | 5.3 Summative Beurteilung mit Lernkontrollen                                                  | 21        |
| 1.4 Mathematikunterricht verstehensorientiert gestalten                                          | 5.4 Summative Beurteilung von Produkten                                                       | 22        |
| 1.5 Kompetenzorientierte Beurteilung in der Mathematik                                           | 5.5 Summative Beurteilung der Lernprozesse                                                    | 24        |
|                                                                                                  | 5.6 Beispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung im 4. und 5. Schuljahr            | 26        |
|                                                                                                  | 5.7 Hinweise zur Planung                                                                      | 28        |
| <b>2 Reichhaltige Aufgaben</b>                                                                   | <b>6 Hinweise zum Zyklus 3</b>                                                                | <b>28</b> |
| 2.1 Zur Bedeutsamkeit reichhaltiger Aufgaben                                                     | 6.1 Formative Beurteilung                                                                     | 28        |
| 2.2 Merkmale reichhaltiger Aufgaben                                                              | 6.2 Beispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung im 7. Schuljahr                   | 29        |
| 2.3 Ein Aufgabenbeispiel für die 3. bis 9. Klasse: Zahlen an der Stellentafel bilden und ordnen  | 6.3 Beispiel einer Produktbewertung                                                           | 30        |
| 2.4 Ein Aufgabenbeispiel für die 5. und 6. Klasse: strukturierte Übungen zu den Grundoperationen | 6.4 Beispiel einer Lernprozessbewertung                                                       | 31        |
| 2.5 Das Aufgabenpotenzial erkennen und nutzen – ein spezifischer Umgang mit dem Lehrmittel       | 6.5 Hinweise zur Planung                                                                      | 34        |
| 2.6 Reichhaltige Aufgaben und Planunterricht                                                     |                                                                                               |           |
| <b>3 Beurteilung im Mathematikunterricht</b>                                                     | <b>Literatur</b>                                                                              | <b>35</b> |
| 3.1 Zyklusübergreifende Hinweise zur Beurteilung im Mathematikunterricht                         | <b>Anhang</b>                                                                                 | <b>36</b> |
| 3.2 Formative Beurteilung im Mathematikunterricht                                                | Beispiel einer Produktebewertung aus der Publikation: Jundt, W&Nydegger, A (2018).            |           |
| 3.3 Summative Beurteilung im Mathematikunterricht                                                | Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten. Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG. |           |
| 3.4 Prognostische Beurteilung im Mathematikunterricht                                            |                                                                                               |           |
| <b>4 Hinweise zum Zyklus 1</b>                                                                   |                                                                                               |           |
| 4.1 Formative Beurteilung                                                                        |                                                                                               |           |
| 4.2 Hinweise zu ausgewählten reichhaltigen Aufgaben im Schweizer Zahlenbuch 1 und 2              |                                                                                               |           |
| 4.3 Hinweise zur Planung für den Kindergarten                                                    |                                                                                               |           |
| 4.4 Hinweise zur Planung für das 1. und 2. Schuljahr                                             |                                                                                               |           |

### Impressum

#### Herausgeber:

Erziehungsdirektion des Kantons Bern  
Lehrplan- und Lehrmittelkommission (LPLMK)

#### Autorinnen und Autoren:

Ueli Hirt, Maria Marti, Philippe Sasdi,  
Andy Schärer, Isabelle Seiler, Johanna Wehrlin

Version 2.0 | Juli 2022

## Einleitung

Die vorliegende Umsetzungshilfe zum Lehrplan 21 für den Fachbereich Mathematik enthält einige allgemeine Hinweise zur Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts für alle drei Zyklen. So werden in den ersten drei Kapiteln Merkmale der Kompetenzorientierung, die Bedeutsamkeit reichhaltiger Aufgaben und zyklusübergreifende Hinweise zum Verständnis der Beurteilung mit dem Lehrplan 21 dargelegt.

Die nachfolgenden drei Kapitel enthalten zyklus-spezifische Ausführungen und Beispiele, mit denen die allgemeinen Hinweise konkretisiert werden. Weitere Beispiele, Konkretisierungen zur Umsetzung des Lehrplans 21 Mathematik und Materialien für den eigenen Unterricht sind auf dem Fächernet verfügbar.

Die einzelnen Kapitel können auch unabhängig voneinander gelesen werden.

Entscheidend an der Kompetenzorientierung im Fachbereich Mathematik ist der Einbezug des gesamten Feldes mathematischen Tuns, das durch Kompetenzbereiche und Handlungsaspekte aufgespannt wird. Eine Beschränkung auf einzelne Zellen der Matrix (vgl. Tabelle 1 im Lehrplan 21 Mathematik, Seite 6) würde der Kompetenzorientierung nicht entsprechen. Auch kann ein Mathematikunterricht, in dem während einer längeren Zeit Aufgaben isoliert zur Förderung eines Handlungsaspekts verwendet werden – beispielsweise Rechnungsaufgaben oder Aufgaben, bei denen nur Begriffe verwendet werden –, nicht als kompetenzorientiert bezeichnet werden.

Diese gleichwertige und möglichst gleichzeitige Förderung von Kompetenzbereichen und Handlungsaspekten ist letztlich das Kernmerkmal eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts.

Bei der Förderung der **überfachlichen Kompetenzen** ist der Fachbereich Mathematik schwergewichtig an den methodischen Kompetenzen beteiligt. Überfachliche Kompetenzen zeigen sich insbesondere in der Verfügbarkeit von Strategien mathematischen Tuns. Diese zu erwerben, ist für das Mathematiklernen grundlegend wichtig. Lernende sollen Strategien aktiv verfügbar haben und sich deren Verwendung bewusst sein. Deshalb ist die Entwicklung eines Strategiebewusstseins eine wesentliche Zielsetzung des Mathematikunterrichts.

Die gemäss Lehrplan 21 zu erwerbenden Strategien sind in den Kompetenzen zum Handlungsaspekt *Erforschen und Argumentieren* aufgenommen. Weil diese für das Lernen der Schülerinnen und Schüler besonders wichtig, jedoch im Lehrplan nicht separat ausgewiesen sind, werden sie hier aufgeführt.

## 1. Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht

### 1.1 Fokus Mathematik: fachliche und überfachliche Kompetenzen fördern

Im Mathematikunterricht sind **fachliche Kompetenzen** stets mit gleichzeitigem Bezug auf die drei Kompetenzbereiche (*Zahl und Variable, Form und Raum* sowie *Grössen, Funktionen, Daten und Zufall*) und auf die dreimal zwei Handlungsaspekte (*Operieren und Benennen, Mathematisieren und Darstellen* sowie *Erforschen und Argumentieren*) zu fördern. Alle Kompetenzbereiche und Handlungsaspekte sind *gleichwertig*.

## Strategien für mathematisches Lernen

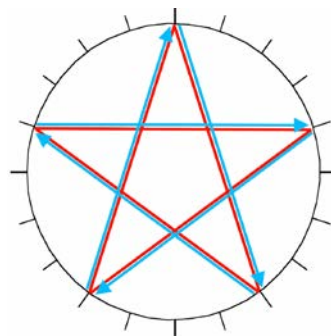
- Ausprobieren
- Systematisch verändern
- Beispiele suchen
- Untersuchen, was beim Verändern passiert
- Bekannte Beispiele beiziehen
- Analogien bilden und verwenden
- Regelmässigkeiten untersuchen
- Vergleichen und ordnen
- Unterschiede berechnen
- Strukturen bilden, untersuchen und verwenden
- Annahmen treffen
- Vermutungen formulieren
- Durch Fragen die Problemstellung klären
- Mit vertrauten Aufgaben vergleichen
- Eine Hilfsaufgabe nutzen
- Vereinfachen/in Teilaufgaben zerlegen
- Lösungsansätze austauschen
- Vermutungen überprüfen
- Vorwärtsarbeiten
- Von einer angenommenen Lösung rückwärtsarbeiten
- Rückschau halten
- Schätzen
- Eine Tabelle machen
- Textverstehensstrategien: W-Fragen, ein Problem mit eigenen Worten beschreiben, die Situation erläutern
- Darstellungsstrategien: visualisieren, eine Skizze machen, geordnet darstellen (z. B. nach der Grösse)
- Lösungsschritte, Vorgehensweisen und Zwischenergebnisse notieren
- Ergebnisse überprüfen

### 1.2 Merkmale eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts

Ein kompetenzorientierter Mathematikunterricht, in dem Kompetenzbereiche und Handlungsaspekte gleichwertig und möglichst gleichzeitig gefördert werden, wird mit *reichhaltigen Aufgaben* umgesetzt. Sie sind deshalb wichtig, weil ihre Bearbeitung von den Lernenden mathematische Tätigkeiten erfordern, die in mehreren Handlungsaspekten angesiedelt sind und teilweise sogar zwei Kompetenzbereiche aufnehmen. Zudem ermöglichen reichhaltige Aufgaben eine Differenzierung im Unterricht: Langsamer Lernende erhalten einen Zugang, und schneller Lernende werden gleichzeitig auf einem höheren Niveau gefordert, weil eine reichhaltige Aufgabe aus mehreren, unterschiedlich anspruchsvollen Teilaufgaben besteht, die mathematisch miteinander zusammengebunden sind.

Dies soll am Beispiel der **Sternenaufgabe/Muster im Kreis**<sup>1</sup> verdeutlicht werden. «Auf einer Kreislinie sind in regelmässigen Abständen Punkte gezeichnet. Ver-

bindet man mit regelmässigem Abstand fortlaufend immer zwei Punkte miteinander, so entstehen regelmässige Vielecke oder Sterne. Im nachfolgenden Beispiel sind Punkte mit dem Abstand von acht Punkten miteinander verbunden. Es entsteht ein Stern.



- Verbinde fortlaufend Punkte mit regelmässigen Abständen. Welche Figuren entstehen?
- Bei welchen Abständen entstehen Vielecke, bei welchen entstehen Sterne?
- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den entstehenden Figuren und den Abständen?
- Welche und wie viele Teilflächen entstehen?
- Und welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl Teilflächen und den Abständen?

<sup>1</sup> Die Aufgabe ist im Fächernet verfügbar:  
<https://www.faechernet.bkd.be.ch/de/start/dienstleistungen/mathematik/unterricht/beurteilen/zyklus-2-produkte-bewerten.html>

Bei dieser Aufgabe sind Tätigkeiten in allen drei Handlungsaspekten gefordert: Erforschen, Argumentieren, Darstellen (Zeichnen), Operieren und Benennen. Zudem nimmt sie Inhalte aus den Kompetenzbereichen *Zahl und Variable* sowie *Form und Raum* auf. Die Sternenaufgabe ermöglicht viele mathematische Erkenntnisse im Bereich mehrerer Kompetenzen und enthält unterschiedliche Anspruchsniveaus für das gesamte Begabungsspektrum. Somit ermöglicht sie eine Förderung auf verschiedenen Kompetenzstufen und eine Differenzierung: Kindergartenkinder beispielsweise könnten auf einem Nagelbrett mit 20 nummerierten Nägeln und einer Schnur regelmässige Figuren spannen. Im Zyklus 2 werden die Figuren auf einer Vorlage gezeichnet und je nach Fähigkeiten Zusammenhänge erforscht. Im Zyklus 3 könnten die Zusammenhänge vertieft erforscht, verallgemeinert und begründet werden (Argumentieren).

Das Fachteam Mathematik des IWD hat für die Umsetzung des Lehrplans 21 Mathematik ausgewählte Merkmale eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts und Indikatoren mit Bezug auf die Sternenaufgabe bestimmt.

🔗 <https://www.faechnet.bkd.be.ch/de/start/dienstleistungen/mathematik/umsetzungshilfe-mathematik.html>

Die gleichzeitige Förderung der verschiedenen Handlungsaspekte, reichhaltige Aufgaben und Differenzierung sind somit für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht zentral. Weiter zeichnen nachfolgende Merkmale einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht aus:

- » kognitive Aktivierung
- » lebensweltliche Anwendung oder Strukturbezüge innerhalb der Mathematik, beispielsweise bei strukturierten Aufgaben (Aufgabenbeispiel «Zahlen an der Stellentafel bilden und ordnen» im Kapitel 2.3)
- » produktives Üben
- » Überarbeiten von Aufgaben
- » Entscheidungsspielraum, Eigenproduktionen und Mitverantwortung
- » Umgang mit Fehlern

- » Wissensvernetzung
- » Austausch und dialogisches Lernen
- » individuelle Lernbegleitung
- » Reflexion/Metakognition
- » Beurteilung mit Produkten

Es versteht sich von selbst, dass nicht in jeder Sequenz alle Merkmale aufgenommen werden können. Entscheidend ist es, den Mathematikunterricht so oft wie möglich so zu gestalten, dass diese Merkmale über einen längeren Zeitraum immer wieder sichtbar werden.

Aufgrund der hohen Bedeutung reichhaltiger Aufgaben für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht enthält Kapitel 2 weitere Ausführungen dazu.

### 1.3 Ausrichtung der Unterrichtsentwicklung im Fachbereich Mathematik

Während der Phase der Umsetzung des Lehrplans 21 wie auch für die weiterführende Unterrichtsentwicklung kann dieser Merkmalskatalog zeigen, worauf die Entwicklung des Mathematikunterrichts ausgerichtet ist. Somit *ist mit diesen Merkmalen die Ausrichtung der Unterrichtsentwicklung im Fachbereich Mathematik bestimmt*. Es gilt, im Rahmen der schulinternen, systematischen und fachspezifischen Unterrichtsentwicklung Schritte hin zu diesem Zielpunkt zu gehen und den eigenen Mathematikunterricht weiterzuentwickeln sowie ihn so weit wie möglich mit Beachtung dieser Merkmale zu gestalten. Im Rahmen des Controllings durch die regionalen Schulinspektorate sind diese Merkmale auf der Website der Erziehungsdirektion des Kantons Bern in verdichteter Form dargestellt:

🔗 [https://www.merkmalelp21.erz.be.ch/merkmalelp21\\_erp/de/index/navi/content.html](https://www.merkmalelp21.erz.be.ch/merkmalelp21_erp/de/index/navi/content.html)

- » Die Lehrpersonen unterrichten mit reichhaltigen Aufgaben und fördern die Schülerinnen und Schüler in allen Kompetenzbereichen und Handlungsaspekten.

- » Die Schülerinnen und Schüler haben fachliche Entscheidungsspielräume und Gelegenheiten, individuelle Lernwege zu gehen, Fehler offenzulegen und Fehlerhaftes produktiv zum Weiterlernen zu nutzen.
- » Die Schülerinnen und Schüler lernen durch eigenes Tun und Erfahren sowie von- und miteinander.
- » Im Rahmen der Reflexion und der Lernbegleitung erhalten die Schülerinnen und Schüler förderorientierte und individuelle Hinweise für die nächsten Lernschritte.
- » Lernkontrollen werden ergänzt durch Beurteilungsanlässe mit reichhaltigen Aufgaben. Produkte der Schülerinnen und Schüler werden nach qualitativen Kriterien eingeschätzt.

#### 1.4 Mathematikunterricht verstehensorientiert gestalten

Kompetenzorientierung heisst letztlich, das Gelernte anwenden und flexibel nutzen zu können. Voraussetzung dafür ist das Verstehen der Mathematik, vor allem das Verstehen zentraler Grundkonzepte (Zahlverständnis, Operationsverständnis, Grössenverständnis, Strategieverständnis u. a. m.). Diese sind auf Seite 19 dargestellt.

Verstehen zeigt sich aber auch in der Fähigkeit, einen Zusammenhang zu beschreiben und zu begründen. Wer eine Sache begründen kann, hat sie verstanden. Deshalb sind Erforschen mit Einbezug der Förderung eines Strategiebewusstseins und Argumentieren bedeutsam. Dabei beschäftigen sich die Lernenden intensiv mit der Sache und begründen so weit möglich Zusammenhänge. Was erforscht worden ist, soll aber auch in Worte gefasst oder bildhaft dargestellt werden. Durch Austausch, Reflexion und das Reden über Mathematik entstehen Erkenntnisse. Deshalb sind diese Aspekte für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht wichtig. Dieser dialogische Prozess erfolgt zwischen den Lernenden untereinander sowie zwischen den Lernenden und der Lehrperson. Gegenstand des Austauschs sind Ergebnisse, Vorstellungen, Darstellungen, Strategien und Stolpersteine der Lernenden.

#### Verstehen wird insbesondere gefördert durch das Verdeutlichen von Zusammenhängen

- » zwischen verschiedenen Darstellungsformen,
- » innerhalb der Mathematik sowie
- » zwischen Mathematik und Alltagswelt.

#### Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen verdeutlichen

Zahlen, Operationen und Begriffe können handelnd, bildhaft, sprachlich und mit mathematischen Symbolen dargestellt werden (Bruner/Oliver/Greenfield 1971). Für die Förderung des Verstehens ist der Wechsel zwischen diesen Darstellungsformen bedeutsam (Wartha/Schulz 2011). Deshalb sind Lernanlässe zu schaffen, bei denen konkrete Situationen oder bildliche Darstellungen in die abstrakte Fachsprache übertragen oder umgekehrt Begriffe oder Terme konkretisiert werden.

#### Zusammenhänge innerhalb der Mathematik verdeutlichen

Mathematik ist die Wissenschaft der Muster, die auch innerhalb der Mathematik vorliegen, wenn beispielsweise eine Operation oder ein Term systematisch verändert und so Teil einer strukturierten Aufgabenserie wird. Solche Muster können erforscht, entdeckt, weitergeführt, selber erzeugt und begründet werden (Wittmann 2012). Die Auseinandersetzung mit Mustern fördert das Verstehen von Mathematik, weil dabei mindestens zwei Elemente miteinander in einem Zusammenhang gesehen werden. Die Frage nach dem *Warum* ist letztlich die entscheidende Frage. Wer sie beantworten kann, hat die Sache verstanden. Dies zeigt sich insbesondere auch beim Begründen von Ergebnissen.

#### Zusammenhänge zwischen Mathematik und Alltagswelt verdeutlichen

Viele Gegenstände der elementaren Mathematik finden ihre Entsprechung in der Alltagswelt, beispielsweise Zahlen, Grundoperationen, geometrische Figuren und Körper sowie Grössen. Die Auseinandersetzung mit Zusammenhängen zwischen abstrakter Mathematik und ihrer konkreten Entsprechung in der Alltagswelt und das Beschreiben solcher Zusammenhänge fördern das Verstehen.

## 2 Reichhaltige Aufgaben

### 1.5 Kompetenzorientierte Beurteilung in der Mathematik

Eine kompetenzorientierte Beurteilung ist eine umfassende Beurteilung, bei der die verschiedenen mathematischen Fähigkeiten aller Kompetenzbereiche und aller Handlungsaspekte gefördert, überprüft und bewertet werden. Die vielfältigen Fähigkeiten im Rahmen eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts lassen sich nicht allein mit geschlossenen Aufgaben überprüfen, die den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Lernkontrollen vorgelegt werden. Vielmehr müssen Lernkontrollen durch Beurteilungsanlässe mit reichhaltigen Aufgaben ergänzt werden, sodass die Beurteilung in der Mathematik letztlich breit abgestützt erfolgt. Dies hat zur Folge, dass auch die Bearbeitung von reichhaltigen Aufgaben nach qualitativen Kriterien eingeschätzt wird. So wird beispielsweise beurteilt, wie Schülerinnen und Schüler

- » Wissen und Fähigkeiten anwenden;
- » fachlich überlegen;
- » Fragen, Gedanken und Lösungswege nachvollziehbar darlegen bzw. dokumentieren;
- » unbefriedigend gelöste Aufgaben überarbeiten.

Zudem werden im Kanton Bern in Ergänzung zur Beurteilung von Lernkontrollen und Produkten auch Lernprozesse bewertet. Diese drei Beurteilungsgegenstände bilden in ihrem Zusammenwirken eine umfassende Beurteilung in der Mathematik, wobei die Beurteilung des Lernprozesses anteilmässig das kleinste Gewicht hat und die Beurteilungsgegenstände Produkt und Lernkontrollen ausgewogen zu gewichten sind.

Kapitel 3 wie auch die Hinweise zum Zyklus 1 (Kapitel 4.1), zum Zyklus 2 (Kapitel 5.1, 5.3, 5.4, 5.5) und zum Zyklus 3 (Kapitel 6.1, 6.2, 6.3, 6.4) enthalten weitere Ausführungen und Beispiele zur Beurteilung.

### 2.1 Zur Bedeutsamkeit reichhaltiger Aufgaben

Nicht nur Operieren und Benennen (die Verwendung von Begriffen), sondern auch Erforschen und Argumentieren sowie Mathematisieren und Darstellen sind wichtige Aspekte mathematischen Handelns (Handlungsaspekte), die in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht je in Bezug auf die Kompetenzbereiche (Inhalte) zu fördern sind. Dafür sind reichhaltige Aufgaben erforderlich. Sie sind das entscheidende Instrument zur Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts, weil sie vielfältige mathematische Tätigkeiten ermöglichen und die Lernenden bei der Bearbeitung reichhaltiger Aufgaben *gleichzeitig* mehrere mathematische Tätigkeiten ausführen.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass ein Mathematikunterricht allein mit reichhaltigen Aufgaben nicht den Erfordernissen einer differenzierten Förderung entspricht. Üben im Sinne eines erweiterten und differenzierenden Übungsverständnisses, bei dem sowohl produktiv als auch automatisierend geübt wird, ist nach wie vor wesentlich. Letztlich sind die Aufgaben möglichst passend auf die Fähigkeiten und Möglichkeiten der Lernenden abzustimmen. Je mehr reichhaltige Aufgaben im Unterricht verwendet werden, desto einfacher wird auch der Umgang mit der Heterogenität, weil reichhaltige Aufgaben mehrere, unterschiedlich anspruchsvolle Teilaufgaben und somit Anforderungen auf verschiedenen Niveaus enthalten, sodass gleichzeitig das gesamte Begabungsspektrum gefördert werden kann.

### 2.2 Merkmale reichhaltiger Aufgaben

- » Sie enthalten einen **innermathematischen Gehalt** oder einen **echten Sachgehalt**. Mehrere Teilaufgaben sind durch mathematische Strukturen oder durch einen bedeutsamen Lebensweltbezug zusammengebunden. In diesem Sinne sind reichhaltige Aufgaben fachlich bedeutsam, anregend, interessant, herausfordernd, kognitiv aktivierend, offen und mehrschichtig.

- » Sie ermöglichen den Schülerinnen und Schülern **individuelle Zugangsweisen**. Sie können eine Aufgabe auf eigenen Wegen, mit individuellen Strategien und mit ihren individuellen Darstellungen bearbeiten.
- » Sie enthalten **differenzierte Ansprüche**. Die ersten Teilaufgaben sind in der Regel einfacher und ermöglichen den langsameren Schülerinnen und Schülern eher einen Zugang. Die weiteren Teilaufgaben sind in der Regel anspruchsvoller, fördern insbesondere auch die schnelleren und könnten so als Rampen für Schülerinnen und Schüler mit erweiterten Fähigkeiten verstanden werden. Dazu sind auch Hilfsmittel differenziert zu verwenden.
- » Sie ermöglichen **produktives Üben**. Weil bei reichhaltigen Aufgaben immer mehrere, zusammengebundene Teilaufgaben vorliegen und somit mehrere Aufgaben bearbeitet werden, wird einerseits automatisierend geübt. Andererseits können Muster erforscht und Zusammenhänge thematisiert werden. Insofern kann sowohl Routine als auch bewusste Verfügbarkeit erlangt werden.
- » Sie fördern **alle Handlungsaspekte**. Dank der Mehrschichtigkeit der reichhaltigen Aufgaben sind die Schülerinnen und Schüler vielfältig mathematisch aktiv: Sie operieren, verwenden Begriffe, stellen die Sache dar, mathematisieren, erforschen, argumentieren und verwenden Strategien. Sie sind somit im Bereich aller sechs Handlungsaspekte tätig. Deshalb sind reichhaltige Aufgaben das entscheidende Instrument zur Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts.

Reichhaltige Aufgaben sind auch Teil der Didaktischen Hinweise des Lehrplans 21 Mathematik: «Reichhaltige Aufgaben orientieren sich an mathematischen oder sachlichen Strukturen, die entdeckt bzw. genutzt werden können. Sie sind offen in Bezug auf Lösungswege, Lösungen, Strategien, Darstellungen, Hilfsmittel und Zahlenräume. Durch diese Offenheit sind sie für alle Schülerinnen und Schüler zugänglich und können auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden.»

### 2.3 Ein Aufgabenbeispiel für die 3. bis 9. Klasse:

Zahlen an der Stellentafel bilden und ordnen  
(mit drei Stellen und somit im Zahlenraum 0 bis 999)

4

Welche Zahlen kannst du mit einem einzigen Plättchen legen?  
Welche Zahlen kannst du mit zwei Plättchen legen?  
Welche Zahlen kannst du mit drei Plättchen legen?

Diese Aufgabe zum Thema «Stellentafel» folgt im Lehrmittel Schweizer Zahlenbuch 3, Schulbuch, S. 38 nach drei geschlossenen Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler Zahlen schreiben und lesen, ausgehend von einer Zahl, die mit Punkten in der Stellenwerttafel dargestellt ist. Auch legen sie selber Zahlen mit Plättchen in der Stellenwerttafel, lesen und schreiben sie.

Mit dem Thema «Stellentafel» wird ein zentraler Aspekt des Zahlverständnisses thematisiert: das Stellenwertverständnis. Durch das Legen und Lesen der Zahlen in der Stellenwerttafel wird die Bedeutung der einzelnen Ziffern in einer Zahl, also der Stellenwert, unterschieden vom Eigenwert der Ziffer. Wer die Stellenwerte und somit das Stellenwertsystem nicht versteht, sollte sich mit der Grundidee unseres Zahlensystems, dem Bündeln zu zehn, auseinandersetzen. Das Stellenwertverständnis ist ein Grundkonzept, das die Schülerinnen und Schüler für das weitere Lernen in Mathematik unbedingt verstanden haben müssen. Zurück zur abgebildeten Aufgabe: So dargelegt ist sie eine geschlossene Aufgabe ebenso wie die vorangehenden fünf Aufgaben. Bei drei verfügbaren Stellenwerten können mit einem Plättchen 3 Zahlen gelegt werden, mit 2 Plättchen 6 Zahlen, mit 3 Plättchen 10 Zahlen. Das ist es – scheinbar. Doch diese Aufgabe enthält enorm viel Potenzial, wenn sie geöffnet wird, und zwar so:

Lege jeweils 3 Plättchen in die Stellenwerttafel, schreibe die Zahl auf und lies sie.

- » Welche und wie viele Zahlen kannst du mit 3 Plättchen bilden?
- » Welche und wie viele Zahlen kannst du mit 4 Plättchen bilden?

» Welche und wie viele Zahlen kannst du mit 2 Plättchen bilden?

» usw.

Damit Schülerinnen und Schüler die Vollständigkeit überprüfen können, sollen sie die gefundenen Zahlen mit einer bestimmten Anzahl Plättchen der Grösse nach ordnen. Das Ordnen von Zahlen der Grösse nach fördert auch wieder das Stellenwertverständnis und ist eine grundlegende Fähigkeit.

Wenn nun die Zahlen beispielsweise mit drei Plättchen der Grösse nach geordnet aufgeschrieben sind, können die Schülerinnen und Schüler Muster zwischen der Abfolge der Ziffern erforschen und beschreiben.

3  
12  
21  
30  
102  
111  
120  
201  
210  
300

Auch können Differenzen zwischen den geordnet aufgeschriebenen Zahlen berechnet werden. Die Differenz beträgt dreimal 9, nach vier Zahlen ist die Differenz 72, dann wieder 9 (zweimal), es folgt die Differenz 81, dann wieder 9 (einmal), schliesslich die Differenz 90.

Wenn das Muster regelmässig ist, sind die Zahlen vollständig. Lücken im Muster helfen, die fehlenden Zahlen zu finden. Insofern sind Muster auch Stützen beim Lernen.

Interessant an dieser Aufgabe ist sodann das Muster, das in der Abfolge der Anzahl Zahlen, die mit 1, 2, 3, 4 Plättchen usw. gebildet werden können, entsteht.

» Mit 1 Plättchen können 3 Zahlen gebildet werden.

» Mit 2 Plättchen können 6 Zahlen gebildet werden.

» Mit 3 Plättchen können 10 Zahlen gebildet werden.

» Mit 4 Plättchen können 15 Zahlen gebildet werden.

» Mit 5 Plättchen können 21 Zahlen gebildet werden.

» Mit 6 Plättchen können 28 Zahlen gebildet werden.

» Mit 7 Plättchen können 36 Zahlen gebildet werden.

» Mit 8 Plättchen können 45 Zahlen gebildet werden.

» Mit 9 Plättchen können 55 Zahlen gebildet werden.

Die Abfolge der Anzahl Zahlen, die gebildet werden können, entspricht der Folge der Dreieckszahlen, mit denen wiederum weitere Regelmässigkeiten und Muster gebildet, erforscht und begründet werden können. Hier nur ein Beispiel: Zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen ergeben immer eine Quadratzahl. Schneller Lernende sowie Schülerinnen und Schüler der 4. bis 6. Klasse beschäftigen sich somit mit den entstehenden Mustern, indem sie diese beschreiben und begründen. Das erfordert Erforschen, Darstellen und Argumentieren.

Auch auf der *Sekundarstufe 1* bleibt das Erforschen und Argumentieren anspruchsvoll. Die Aufgabe könnte beispielsweise auf 4 Stellenwerte erweitert werden. Oder es könnte erforscht werden, was passiert, wenn die entstehenden Zahlen durch 9 dividiert werden – beispielsweise:

3 : 9 = 0, Rest 3  
12 : 9 = 1, Rest 3  
21 : 9 = 2, Rest 3  
30 : 9 = 3, Rest 3  
102 : 9 = 11, Rest 3  
111 : 9 = 12, Rest 3  
120 : 9 = 13, Rest 3  
201 : 9 = 22, Rest 3  
210 : 9 = 23, Rest 3  
300 : 9 = 33, Rest 3

Warum entsteht immer Rest 3, und warum entstehen regelmässige Quotienten?

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Abfolge der Anzahl Zahlen mit den verschiedenen Plättchen zu verallgemeinern und somit die Summe der fortlaufend addierten natürlichen Zahlen zur Summe als Dreieckszahl für  $n$  zu bestimmen (auch wenn sodann 10 und mehr Plättchen nicht mehr real in der Stellentafel gelegt werden können).

## 2.4 Ein Aufgabenbeispiel für die 5. und 6. Klasse: strukturierte Übungen zu den Grundoperationen

Im Arbeitsheft zum Zahlenbuch 5 liegen auf den Seiten 17–19 bzw. 20–22 (Ausgabe 2017) Aufgaben zum Üben der Addition und Subtraktion bzw. der Multiplikation und Division vor.

Die Arbeitsanweisung dazu: «Rechne auf deinem Weg.»

- 2** A  $40\,966 + 1234 + 57\,900$   
 B  $23\,456 + 23 + 176\,721$   
 C  $15\,393 + 97\,982 + 186\,925$   
 D  $159 + 3 + 400\,238$   
 E  $424\,143 + 5123 + 71\,234$   
 F  $25\,963 + 451\,057 + 123\,580$

Die Summen verändern sich im Tausender und im Hunderttausender stets um 1:

- A 100 100    B 200 200    C 300 300  
 D 400 400    E 500 500    F 600 600

- 5** A  $107\,530 - 8765$   
 B  $88\,419 - 765$   
 C  $164\,197 - 87\,654$   
 D  $65\,486 - 54$   
 E  $54\,864 - 543$   
 F  $55\,555 - 12\,345$

Die Differenzen verändern sich von der einen zu anderen in jedem Stellenwert jeweils um 1:

- A 98 765    B 87 654    C 76 543  
 D 65 432    E 54 321    F 43 210

- 1** A  $13 \cdot 22$  |  $12 \cdot 23$   
 B  $24 \cdot 33$  |  $23 \cdot 34$   
 C  $35 \cdot 44$  |  $34 \cdot 45$   
 D  $46 \cdot 55$  |  $45 \cdot 56$   
 E  $57 \cdot 66$  |  $56 \cdot 67$   
 F  $74 \cdot 83$  |  $73 \cdot 84$

Die Produkte innerhalb einer Tandemmultiplikation unterscheiden sich jeweils um einen Zehner:

286/276    792/782    1540/1530  
 2530/2520    3762/3752    6142/6132

### 3 Interessante Ergebnisse

- A  $8638 : 7 =$  \_\_\_\_\_  
 $16415 : 7 =$  \_\_\_\_\_  
 $24192 : 7 =$  \_\_\_\_\_  
 $31969 : 7 =$  \_\_\_\_\_

Die Quotienten verändern sich vom einen zum anderen in jedem Stellenwert jeweils um 1:

1234    2345    3456    4567

Die Ergebnisse dieser Aufgaben können berechnet werden (ebenso die weiteren Aufgaben dieser Seiten des Arbeitsheftes). Damit werden die Grundoperationen mit grossen Zahlen geübt. Das soll so sein und ist *das eine*. Nicht wenige Lernende jedoch verfügen über die nötigen Kompetenzen zum Ausführen der Grundoperationen. Insofern können diese Aufgaben einerseits zur Differenzierung verwendet werden, in dem Sinne, dass schneller Lernende sich mit den Strukturen auseinandersetzen. Sie beschreiben sodann die Regelmässigkeiten innerhalb einer Aufgabenserie, sowohl bei den Aufgaben wie auch bei den Ergebnissen. Andererseits ist zumindest die punktuelle Auseinandersetzung mit diesen Mustern und Strukturen durch alle Lernenden wesentlich. Das Beschreiben der Regelmässigkeiten fördert ein Verständnis des Stellenwertsystems und somit das Grundlegende. Die Auseinandersetzung mit den durchwegs strukturierten Ergebnissen im Sinne der Kompetenzorientierung bei gleichzeitiger Förderung im Bereich der Handlungsaspekte Operieren, Darstellen, Erforschen und Argumentieren ist *das andere*. Und der Austausch über die Rechenwege wäre *das Dritte*. Auch damit kann das Bewusstsein zur Bedeutung der

Stellenwerte erhöht werden. Der gemeinsame Austausch über die Rechenwege unterstützt das flexible Rechnen und die Verwendung individueller Strategien. Alle diese Aspekte fördern letztlich das Verstehen und sind Teil eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts.

Mit derart strukturierten Aufgaben ist bereits realisiert, was im zweiten Teil des Didaktischen Hinweises zu reichhaltigen Aufgaben dargelegt ist: einen Term zu einer strukturierten Aufgabenserie erweitern.

«Geschlossene Aufgaben, die scheinbar nur ein Ergebnis oder einen Lösungsweg zulassen, lassen sich oft anreichern. Dabei stellen die Lehrpersonen z. B. einen Term in eine strukturierte Aufgabenserie und regen zum Vergleichen oder zum Übertragen in eine andere Darstellung an.» □ Lehrplan 21 | Fachbereichslehrplan | Mathematik | Didaktische Hinweise | Seite 4

Insofern ist es bedeutsam, Aufgaben stets unter dem Gesichtspunkt von Mustern und Strukturen anzuschauen und sodann diese Muster zur Kompetenzförderung im Bereich des Darstellens, Erforschens und Argumentierens und letztlich im Dienste der Förderung des Verstehens zu nutzen.

## 2.5 Das Aufgabenpotenzial erkennen und nutzen – ein spezifischer Umgang mit dem Lehrmittel

Was bedeutet das nun für die Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts?

Aufgaben sollten stets auch unter dem Gesichtspunkt von Mustern angeschaut werden. Vorhandene Regelmässigkeiten können weitergeführt, dargestellt (selber gebildet), erforscht und begründet werden. Die Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern fördert somit die Handlungsaspekte Darstellen, Erforschen und Argumentieren. Derartige Aufgaben sind strukturierte Aufgaben, und strukturierte Aufgaben sind reichhaltige Aufgaben zur Kompetenzförderung. Sie dienen letztlich dazu, das Verstehen zu fördern, weil Zusammenhänge vorliegen, die sodann thematisiert werden können. Wer Zusammenhänge beschreiben

und begründen kann, versteht diese und damit die Sache selbst.

Wichtig ist nun der Umgang mit dem Lehrmittel. Im Schweizer Zahlenbuch, in MATHWELT wie auch im mathbuch sind grundsätzlich reichhaltige Aufgaben enthalten. Diese sollen zur Kompetenzorientierung genutzt werden. Das bedeutet, dass die Lehrperson als Erstes das Potenzial von Aufgaben erkennt und merkt, inwiefern eine Aufgabe strukturiert oder eben reichhaltig ist (siehe «Merkmale reichhaltiger Aufgaben»). Wichtig ist sodann eine spezifische Gestaltung des Mathematikunterrichts, sodass das erkannte Aufgabenpotenzial zur differenzierten und kompetenzorientierten Förderung der Schülerinnen und Schüler beim Unterrichten genutzt wird (siehe Kapitel 2.6 «Reichhaltige Aufgaben und Planunterricht»).

Mit Blick auf die Ausführungen im nächsten Kapitel sei erwähnt, dass reichhaltige Aufgaben nicht nur **inner-mathematisch strukturierte Aufgaben** sind – also mehrere einzelne arithmetische oder algebraische Aufgaben, bei denen die Zahlen systematisch verändert sind und so Muster enthalten –, sondern auch **Aufgaben mit einem bedeutsamen, echten Sachgehalt** (z. B. □ Schweizer Zahlenbuch 3 | Schulbuch | Seite 74/76 | Fledermäuse oder Schweizer Zahlenbuch 5 | Schulbuch | Seite 28/29 | Grössen bei Bienen | MATHWELT 2 | Themenbuch 1. Semester | Im Zirkus – Kosten berechnen | Seite 42).

## 2.6 Reichhaltige Aufgaben und Planunterricht

Der Umgang mit der Heterogenität ist eine der grössten Herausforderungen für den Unterricht und steht permanent im Fokus. Deshalb führt bei der Gestaltung eines erfolgreichen Unterrichts kein Weg an der Differenzierung vorbei. Häufig wird der Anspruch durch innere Differenzierung als organisatorische Massnahme durch die Lehrperson eingelöst: Die einen Schülerinnen und Schüler arbeiten an einfacheren Aufgaben, andere an schwierigeren. Plan- und Wochenplanunterricht ist eine verbreitete Form der inneren Differenzierung. Diese Form ist für den Mathe-

### 3 Beurteilung im Mathematikunterricht

matikunterricht skeptisch zu betrachten, weil die Schülerinnen und Schüler dabei die Tendenz haben, Aufgaben abzuarbeiten. Häufig bestreiten Lernende einen vorgegebenen Weg von obligatorischen hin zu Wahlaufgaben. Eine vertiefte Auseinandersetzung auf verschiedenen Ebenen und vor allem auf dem Niveau des jeweiligen Individuums ist selten möglich. Beim Wochenplanunterricht sind gleichzeitig zu viele verschiedene Aufgaben und somit zu viele verschiedene Inhalte im Raum, als dass substanzielles «Mathematiktreiben» bzw. eine Diskussion darüber möglich wird. Ein Austausch ergibt unter der Voraussetzung der grossen Verschiedenheit der im Raum stehenden Inhalte nur bedingt Sinn. Die wesentlichen Ziele des Mathematikunterrichts, vor allem das Fördern des Verstehens, treten so zu sehr in den Hintergrund. Ist die Mehrheit der Klasse mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen oder gar mit verschiedenen Themen beschäftigt, wird die nahe am Denkprozess der einzelnen Schülerinnen und Schülern stattfindende Begleitung erschwert. Die Lehrperson braucht letztlich auch einen Moment, um unterstützende und fördernde Impulse zu geben und Impulsfragen zu stellen. Aus all diesen Gründen erachten wir es für den Lernerfolg in der Mathematik als günstiger, den Unterricht mit jeweils einer reichhaltigen Aufgabe zu gestalten, an der alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse gemeinsam Mathematik betreiben, jedoch auf ihrem je eigenen Niveau. Mit den dargestellten Hinweisen, was die Lehrperson im Rahmen der individuellen fachlichen Begleitung tut, ist natürliche Differenzierung möglich. Letzten Endes geht es nicht darum, dass die Lernenden die Dinge machen, sondern darum, dass die Lernenden die Dinge *können*.

Und in der Mathematik entsteht *Können* indem Lernende...

- » über die Sache FRAGEN STELLEN
- » über die Sache NACHDENKEN
- » über die Sache REDEN!

#### 3.1 Zyklusübergreifende Hinweise zur Beurteilung im Mathematikunterricht

Die Grundlagen zur Beurteilung im Mathematikunterricht mit dem Lehrplan 21 sind in den Allgemeinen Hinweisen und Bestimmungen (AHB) dargelegt:

- » Allgemeine Beschreibung einer kompetenzorientierten Beurteilung mit dem Lehrplan 21 (AHB 5.2.1)
- » Qualitätsmerkmale einer kompetenzorientierten Beurteilung: Förderorientierung, Passung zum Unterricht, Transparenz/Nachvollziehbarkeit und umfassende Beurteilung (AHB 5.2.2)
- » Funktionen einer kompetenzorientierten Beurteilung: formative, summative und prognostische Beurteilung (AHB 5.2.3)
- » Grundansprüche (AHB 5.2.4)
- » Orientierungspunkte (AHB 5.2.5)

#### 3.2 Formative Beurteilung im Mathematikunterricht

Mit der Umsetzung des Lehrplans 21 wird die formative Beurteilung und somit die Förderorientierung grundsätzlich gestärkt. In den AHB wird mehrmals darauf hingewiesen:

- » Ein besonders starker Akzent wird auf die förderorientierte Beurteilung gelegt, die den Lernprozess begleitet und unterstützt sowie den individuellen Lernvoraussetzungen und Lernwegen Rechnung trägt. (AHB 5.2.1)
- » Der Lehrplan 21 gibt der förderorientierten Beurteilung in Form von Begleitung, Rückmeldung und Unterstützung der Schülerinnen und Schüler ein zentrales Gewicht. Dauerndes Bilanzieren mit häufigen Beurteilungsberichten hindern diesen Prozess und erzeugen unnötigen Druck. (AHB 5.2.6)
- » Für die Schülerinnen und Schüler ist ersichtlich, ob sie sich in einer Lern- oder Beurteilungssituation befinden. Der überwiegende Teil des Unterrichts sind Lernsituationen, in denen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen sammeln, Fehler machen und daraus lernen dürfen. (AHB 5.2.1)

Die Schülerinnen und Schüler fördern ist also die grundlegendste Aufgabe beim Unterrichten. Sie soll im Vordergrund stehen unter anderem dadurch, dass erst-

mals ein Beurteilungsbericht mit Noten zum Ende des 4. Schuljahres ausgestellt wird und auf der Sekundarstufe 1 kein Probesemester mehr besteht. Im Gegenzug sind «beschwerdefähige individuelle Schullaufbahnentscheide in der ganzen Volksschule grundsätzlich jederzeit möglich und können für einzelne Schülerinnen und Schüler individuell getroffen werden, wenn es nötig und sinnvoll ist» (AHB 5.2.6). Konkretisierende Ausführungen zur formativen Beurteilung finden sich in den Kapiteln zu den einzelnen Zyklen.

### 3.3 Summative Beurteilung im Mathematikunterricht

Die summative Beurteilung umfasst auch im Mathematikunterricht drei Beurteilungsgegenstände:

- » Produkte
- » Lernkontrollen
- » Lernprozesse

Sie alle bilden die nötigen Grundlagen für eine abschliessende summative Beurteilung in einem Beurteilungsbericht. Im Mathematikunterricht sollten somit summative Beurteilungen durch *Lernkontrollen* ergänzt werden mit *Beurteilungen von Produkten und Lernprozessen*. Diese Ergänzungen sind entscheidend für eine kompetenzorientierte Beurteilung, weil Lernkontrollen tendenziell geschlossene Aufgaben enthalten und somit schwergewichtig Aussagen über die Kompetenzen in den Handlungsaspekten *Operieren und Benennen* und *Mathematisieren* machen sowie in geringem Masse auch über Kompetenzen im *Argumentieren*. Weil eine kompetenzorientierte Beurteilung jedoch Kompetenzen in allen Handlungsaspekten überprüfen soll, ist es wesentlich, im Rahmen einer kompetenzorientierten Beurteilung die anderen beiden Beurteilungsgegenstände Produkte und Lernprozesse zu stärken.

Das Schweizer Zahlenbuch, MATHWELT wie auch mathbuch enthalten Lernkontrollen in den Online-materialien. Deshalb werden in dieser Umsetzungshilfe und auch auf dem Fächernet zum Lehrplan 21 keine beispielhaften Lernkontrollen bereitgestellt.<sup>2</sup>

*Produkte* entstehen insbesondere beim Bearbeiten reichhaltiger Aufgaben. Deshalb sind reichhaltige Aufgaben bedeutsam, auch im Rahmen der summativen Beurteilung. Die Beurteilung der Produkte erfolgt nach Kriterien. Ein Beispiel ist in der «Illustrierten Lernsituation Mathematik» zu finden:

 [https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten\\_volksschule/kindergarten\\_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html](https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten_volksschule/kindergarten_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html)

In den Kapiteln 5.4 bzw. 6.3 ist zum Zyklus 2 bzw. zum Zyklus 3 je ein Beispiel einer summativen Beurteilung mit einem Produkt dargestellt. Weitere Beispiele für den Zyklus 2 und für den Zyklus 3 sind auf dem Fächernet verfügbar. *Lernprozesse* werden nach den fünf in den AHB dargelegten Aspekten beurteilt und für die Mathematik konkretisiert (siehe Tabelle Seite 14).

Diese Konkretisierungen sind in der «Dokumentation zur summativen Beurteilung Mathematik» aufgenommen:

 [https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten\\_volksschule/kindergarten\\_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html](https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten_volksschule/kindergarten_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html)

<sup>2</sup> Ausnahme bildet die Übergangslösung für die 3. und 4.-Klasse. Hier stehen – bis die Weiterentwicklung Schweizer Zahlenbuch verfügbar ist – im Fächernet Materialien zur Verfügung.

| Aspekte                          | Konkretisierung für die Mathematik                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Lernprozesse reflektieren</b> | Die Aufgabenbearbeitung, den eigenen Lernstand, Lernfortschritte und Erkenntnisse beschreiben und einschätzen. Über Lernwege, Darstellungen und Ergebnisse nachdenken. Folgerungen für das weitere Lernen ziehen.                                                                                                                                                                             |
| <b>Gelerntes darstellen</b>      | Das Gelernte mit eigenen Worten, Beispielen oder Skizzen fachlich richtig darstellen (z. B. Merkheft, Portfolio). Eigene Darstellungen angemessen überarbeiten, nutzen, erläutern, vergleichen. Lösungen und Fehler kommentieren.                                                                                                                                                             |
| <b>Förderhinweise nutzen</b>     | Fehler erkennen und beschreiben. Förderhinweise von Lehrpersonen und Mitlernenden aufnehmen und produktiv nutzen. Mitlernenden sach- und prozessbezogene Hinweise und Rückmeldungen geben. Unbefriedigend gelöste Aufgaben bearbeiten (z. B. Verbesserungen bei Lernkontrollen und Produkten, zu automatisierende Fertigkeiten trainieren).                                                   |
| <b>Strategien verwenden</b>      | Probieren, systematisch verändern, eine Annahme treffen, bekannte Beispiele verwenden, vereinfachen, vergleichen, ordnen, vom Ergebnis ausgehen, Analogien und Strukturen verwenden, ein Problem mit eigenen Worten beschreiben oder mit Skizzen darstellen. Lösungsschritte, Vorgehensweisen und Zwischenergebnisse notieren, Fragen stellen.                                                |
| <b>Selbstständig arbeiten</b>    | Situationen und Phänomenen mit einer fragenden Haltung begegnen, sich Informationen beschaffen, neue Inhalte selbstständig erschließen. Individuell weiterarbeiten, eigene Denkleistungen erbringen, Hilfsmittel verwenden, Lösungen überprüfen und überarbeiten, zielorientiert und effizient arbeiten, Ausdauer entwickeln, gezielt Unterstützung beiziehen und angemessene Fragen stellen. |

Tabelle: Aspekte zur Bewertung der Lernprozesse und die Konkretisierung für die Mathematik

Im Fachbereich Mathematik sind zur Bewertung von Lernprozessen zwei grundsätzlich unterschiedliche Umsetzungsideen möglich.

- » 1. Lernprozesse resp. die fünf Aspekte, welche über einen längeren Zeitraum beobachtet und bewertet werden. Dies könnte i. S. eines ritualisierten Unterrichtselement mit (z. B.) semesterweiser Bewertung sein.
- » 2. Die Umsetzung ausgehend von einer Unterrichtssequenz oder einer Aufgabe. Die Arbeit der Lernenden wird summativ bewertet, die Bewertungskriterien zielen auf den Aufbau methodischer Kompetenzen resp. der fünf Aspekte.

Der wesentliche Unterschied der beiden Umsetzungsideen ist die Verankerung im Unterricht: während in Variante 2 eine klar eingegrenzte Aufgabenstellung innerhalb einer oder weniger Lektionen bearbeitet wird, entstehen die Arbeiten der Lernenden bei Variante 1 während einem längeren Zeitraum. Die Lernenden kennen die Bewertungskriterien und wissen, wann die Lernprozessbewertung erfolgt.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Im Fächernet ist eine Sammlung verschiedener Umsetzungsideen verfügbar:  
<https://www.fachernet.bkd.be.ch/de/start/dienstleistungen/mathematik/unterricht/beurteilen/zyklus-2-produkte-bewerten.html>

**Die summative Beurteilung im Beurteilungsbericht zu den Zyklen 2 und 3** ist eine Gesamteinschätzung der Leistungen über die gesamte Beurteilungsperiode verdichtet in einer Note, die im Beurteilungsbericht aufgenommen wird. Als Grundlage zur Bildung der Note sei die «Dokumentation der summativen Beurteilungen» empfohlen, mit der die einzelnen Bewertungen im Verlaufe eines Schuljahres in einem Dokument zusammengestellt werden können s.o. Ein Beispiel einer Dokumentation der summativen Beurteilungen für das 5. Schuljahr liegt an gleicher Stelle vor:

🔗 [https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten\\_volksschule/kindergarten\\_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html](https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten_volksschule/kindergarten_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html)

→ *Ausgefülltes Musterbeispiel Mathematik*

Kapitel 5.6 enthält ein weiteres Beispiel für das 4. Schuljahr und Kapitel 6.2 ein Beispiel für das 7. Schuljahr. «Die Noten im Beurteilungsbericht sind ein Instrument zur Kommunikation der Beurteilung von Leistungen der Schülerinnen und Schüler und das Ergebnis eines professionellen Ermessensentscheids durch die Lehrperson. Sie basieren nicht auf Berechnungen von Durchschnittsn.» (AHB, Kapitel 5.2.3 zur summa-

## 4 Hinweise zum Zyklus 1

tiven Beurteilung). Zur Bestimmung der Note im Beurteilungsbericht wird für die Mathematik folgende Gewichtung der drei Beurteilungsgegenstände empfohlen:

Gemäss den AHB (Kapitel 5.2.3 zur summativen Beurteilung) sind die Beurteilungsgegenstände Produkt und Lernkontrollen ausgewogen zu gewichten. Lernprozesse haben anteilmässig das kleinste Gewicht. Der Fachbereich Mathematik empfiehlt folgende Aufteilung vor: Lernkontrollen 40–50%, Produkte 40–50%, Lernprozesse 10–20%. Als Faustregel könnten im Zyklus 2 und 3 über das ganze Schuljahr verteilt demnach etwa 4–5 Lernkontrollen, 4–5 Produkte und 1–2 Lernprozessbewertungen eingesetzt werden.

### 3.4 Prognostische Beurteilung im Mathematikunterricht

Die prognostische Beurteilung ist für den Übertritt in die Sekundarstufe 1 und für die Berufs- und Schulwahl beim Übertritt von der Sekundarstufe 1 in die Sekundarstufe 2 von Bedeutung. An dieser Stelle wird auf die entsprechenden Ausführungen in den AHB (5.2.3 zur prognostischen Beurteilung) verwiesen. Wichtig ist die Grundlage für die prognostische Beurteilung: «nicht nur Ergebnisse der summativen Beurteilung (abschliessende Bewertung bzw. Note im Beurteilungsbericht), sondern auch Elemente der formativen Beurteilung sowie die Einschätzung des Potenzials einer Schülerin oder eines Schülers» (AHB 5.2.3 zur prognostischen Beurteilung). So entspricht beispielsweise ein gewichteter Zusammenzug der summativen Beurteilungen im 2. Semester des 5. Schuljahres und des 1. Semesters des 6. Schuljahres nicht der prognostischen Beurteilung. Formative Beurteilungen sind bei der Darlegung der Leistungen in der Mathematik im Übertrittsbericht einzubeziehen.

### 4.1 Formative Beurteilung

Die **Leitfragen und Beobachtungsmöglichkeiten** der webbasierten Umsetzungshilfe «Entwicklung beobachten und Lernen begleiten» (EBLB) im Fachbereich Mathematik stehen zur Verfügung, um Kinder beim mathematischen Lernen ihrer Entwicklung entsprechend zu unterstützen und zu begleiten:

🔗 <https://www.eblb.ch/web/de/mathematik/>

Sowohl das freie Spiel als auch Aufgabenbearbeitungen in geführten Sequenzen bieten sich an, um Beobachtungen zu machen und Erkenntnisse über den mathematischen Lernstand der Kinder zu gewinnen. Ausgehend von den Erkenntnissen werden die nächsten Unterrichtssequenzen und die Spiel- und Lernbegleitung geplant.

Bei den Übungen des Blitzrechnens im Schweizer Zahlenbuch 1 und 2 handelt es sich um eine «Daueraufgabe», in deren Rahmen die Fortschritte der Schülerinnen und Schüler von der Lehrperson erhoben werden sollten. Die Überprüfung der Lernfortschritte kann und sollte individuell erfolgen. Beim Blitzrechnen ist die Begleitung und Unterstützung der Schülerinnen und Schüler zentral. In diesem Sinne sind Beurteilungen im Rahmen des Blitzrechnens immer formative Beurteilungen.

Am Ende von Zyklus 1 wird beurteilt, ob die Schülerinnen und Schüler die **Grundansprüche** im Fachbereich Mathematik **erreicht oder nicht erreicht** haben. Das Erreichen der Grundansprüche kann aufgrund der formativen Beurteilung eingeschätzt werden.

Wird während des Zyklus 1 auch summativ beurteilt, umfasst die summativ Beurteilung Bewertungen von Produkten, Lernkontrollen und Lernprozessen. Für das erfolgreiche mathematische Weiterlernen ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler nach ungenügenden Leistungen bei summativen Beurteilungen unterstützt und gefördert werden. Sie sollen die Möglichkeit haben, noch nicht erworbene Kompetenzen möglichst bis zum Ende des Zyklus 1 zu erwerben.

#### 4.2 Hinweise zu ausgewählten reichhaltigen Aufgaben

Zusätzlich zu den Ausführungen zu reichhaltigen Aufgaben in Kapitel 2 werden hier exemplarisch zwei reichhaltige Aufgaben vorgestellt.

##### Aufgabenbeispiel 1: «Auf einen Blick»

Durch die Bearbeitung der Aufgabe «Auf einen Blick» (Schweizer Zahlenbuch 1, Schulbuch, S. 10/11; siehe Abbildung unten) üben die Schülerinnen und Schüler das Erfassen von kleinen Anzahlen. Die Anzahlen sollen flexibel dargestellt und das Wahrnehmen von strukturierten Mengen gefördert werden.

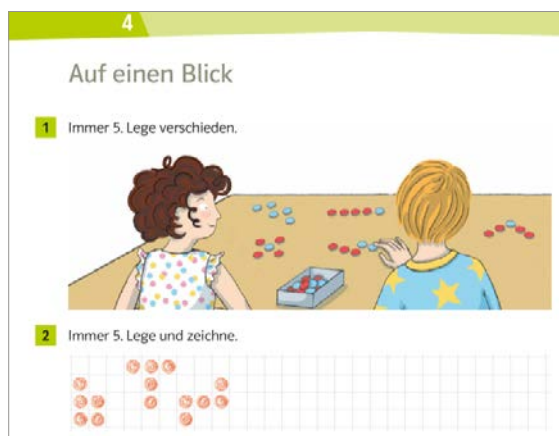
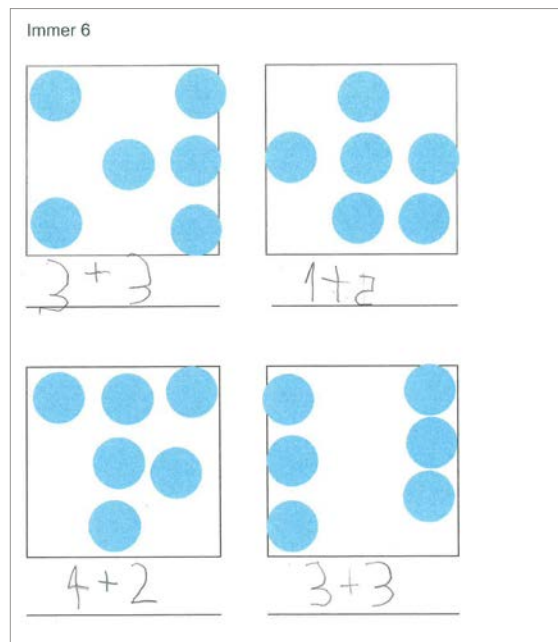


Abb.: Schweizer Zahlenbuch 1 | Schulbuch | S. 10/11

Wird das Aufgabenpotenzial genutzt, können sich die Schülerinnen und Schüler vertieft mit der flexiblen Darstellung und Erfassung von kleinen Anzahlen auseinandersetzen.

##### Aufgabe

Lege die 6 Biellapunkte so auf den Teppich, dass du auf einen Blick (ohne zu zählen) erkennen kannst, dass es 6 sind. Zeige deine Anordnung deinen Gruppenmitgliedern. Besprecht Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Klebe auf dem Arbeitsblatt mit Klebepunkten verschiedene Anordnungen auf. Erstelle Karten für eine «Musterkartei».



Beispiel Arbeitsblatt «Immer 6»

Auf dem Fächernet liegt die vollständige Dokumentation der Aufgabe mit didaktischen Hinweisen und Dokumenten von Schülerinnen und Schülern vor.

##### Aufgabenbeispiel 2:

##### «Schätzen, Bündeln und Zählen»

Die folgende reichhaltige Aufgabe «Schätzen, Bündeln und Zählen» kann zur Vertiefung oder anstelle der LU 2 des Schweizer Zahlenbuchs 2 (S. 6/7) oder des Lernanlasses Zähl-Brille aus Mathwelt 1 bearbeitet werden. Bei dieser Aufgabe üben die Schülerinnen und Schüler das geschickte Zählen und Schätzen. Grundlage sind Karten aus der Kartei «Sachrechnen im Kopf 1/2» (vgl. Wittmann/Müller, 2007) (Anzahlen bis 20/100) sowie Bilder von Zugvögeln.

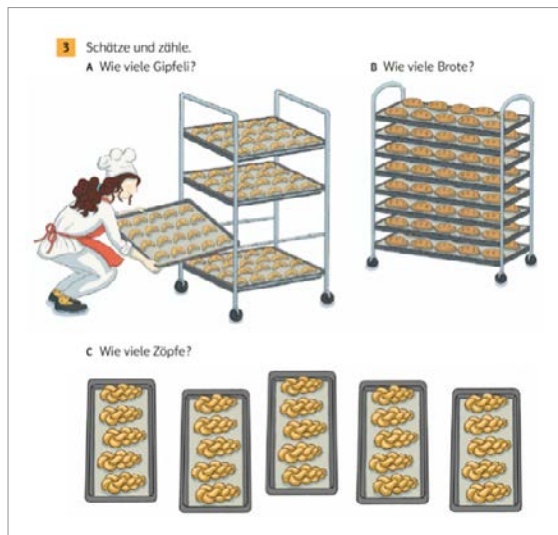


Abb.: LU 2 | S. 16

durch geschicktes Zählen (5er-, 10er-Päckchen). Tausche deine Zählstrategie mit deiner Lernpartnerin oder deinem Lernpartner aus.

Beispiel Anzahlen bis 100



Schätzung | Bündelung | Rechnung

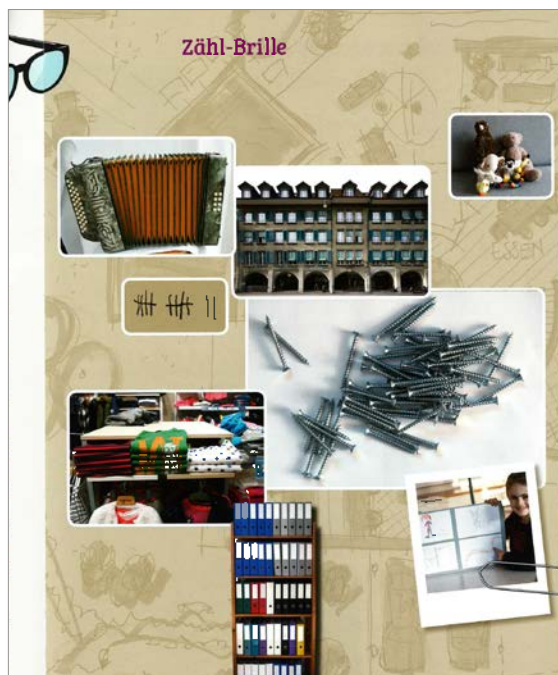


Abb.: Themenbuch | S. 16

Auf dem Fächernet liegt die vollständige Dokumentation der Aufgabe mit didaktischen Hinweisen und Dokumenten von Schülerinnen und Schülern vor.

#### 4.3 Hinweise zur Planung für den Kindergarten

«Es ist eine wichtige Aufgabe des Kindergartens, allen Kindern den Zugang zu vielfältigen mathematischen Erfahrungen zu ermöglichen und ihnen zu einer fruchtbaren Auseinandersetzung mit mathematischen Erfahrungen zu verhelfen. Eine Möglichkeit, sich breite Erfahrungen anzueignen, bieten die Phasen der freien Tätigkeit. Die Einrichtung des Kindergartens, die Gegenstände, Geräte und Spiele, die den Kindern zur Verfügung stehen, lösen Neugierde und Interesse aus und leisten einen wichtigen Beitrag für den Aufbau mathematischer Kompetenzen. Daneben sind aber auch von der Lehrperson geplante und angeleitete Sequenzen nötig.» (□ Kinder begegnen Mathematik I Ordner Kindergarten I Begleitheft I Seite 2)

#### Aufgabe

Schätze die Anzahl auf der Karte. Tausche deine Schätzstrategie mit deiner Lernpartnerin oder deinem Lernpartner aus. Überprüfe deine geschätzte Anzahl

Bei der Planung von Angeboten des freien Spiels ist es deshalb wichtig, zu überlegen, welche ergänzenden Materialien Kinder zu mathematischen Aktivitäten anregen könnten. Wird der Gemüse- und Früchte-

marktstand mit einer Kleiderbügelwaage (siehe Kinder begegnen Mathematik I Ordner Kindergarten I Erkunden und Messen) ergänzt, regt dies die Kinder an, herauszufinden, welches Gemüse am schwersten ist und ob zwei Birnen gleich schwer sind wie ein Apfel (Kompetenzbereich *Grössen, Funktionen, Daten und Zufall*). Perlen und Schnurstücke in der Familienecke animieren zum Herstellen von Perlenketten (Kompetenzbereich *Zahl und Variable*), und in der Bauecke könnten zusätzlich zu den gängigen Bauklötzen Kugeln und Zylinder zur Verfügung stehen (Kompetenzbereich *Form und Raum*). Ausgehend von Beobachtungen kann die Kindergartenlehrperson während der Begleitung des freien Spiels den Kindern neue Möglichkeiten eröffnen oder durch Fragen und Hinweise zu weiteren mathematischen Tätigkeiten anregen (vgl. Seiler, Isabelle, 2015). Dafür brauchen Kindergartenlehrpersonen fachliches Wissen, beispielsweise über die Zählkompetenzen und den Verlauf der Zählentwicklung sowie über die strukturierte Anzahlerfassung (vgl. Schneider, Wolfgang; Küspert, Petra & Krawjewski, Kristin, 2013).

Bei angeleiteten Sequenzen ist darauf zu achten, dass die Eigenaktivität der Kinder hoch ist und die Aufträge unterschiedliche Bearbeitungen ermöglichen. Unterrichtsvorschläge finden sich im Ordner Kindergarten des Lehrmittels «Kinder begegnen Mathematik»<sup>4</sup>, in den Spielbüchern des «Zahlenbuchs zur Frühförderung 1 und 2»<sup>5</sup> und in den Themenbüchern des Lehrmittels «MATHWELT 1»<sup>6</sup>. Sowohl bei den Unterrichtsvorschlägen als auch bei den Spielen zur Frühförderung folgt nach einer kurzen Einführung eine Phase der Eigenaktivität, in der die Kinder ausgehend von ihrem Vorwissen vielfältige Erfahrungen sammeln bzw. alleine spielen und bauen. Anschliessend findet eine gemeinsame Auswertung mit dem Berichten von Erfahrungen oder dem Zeigen von Sachen statt. **Eine mögliche Jahresplanung liegt bei den Lehrmitteln «Kinder begegnen Mathe-**

**matik» und bei «MATHWELT 1» vor. Beim «Zahlenbuch zur Frühförderung» sind Informationen zur Planung im Begleitband zur Frühförderung zu finden.**

#### 4.4 Hinweise zur Planung für das 1. und 2. Schuljahr

Anhaltspunkte zur Planung sind sowohl im Begleitband zum Schweizer Zahlenbuch 1 und 2 als auch auf der Übersicht «Jahres- und Themenplanung» von MATHWELT 1 zu finden. Weiter wird in beiden Lehrmitteln detailliert die Beziehung zwischen dem Lehrplan 21 und den Lernumgebungen (Schweizer Zahlenbuch 1 und 2) und Aufträgen (MATHWELT 1) aufgezeigt.

Auch im 1. und 2. Schuljahr kann mit Spiel- und Lernumgebungen gearbeitet werden. Eine thematische Spiel- und Lernumgebung liegt auf dem Fächernet für den Kompetenzbereich *Form und Raum* vor: «Lernumgebung zu den Körpern Kugel, Würfel, Quader».

Durch das Einrichten einer Mathematikecke bzw. eines Mathematikregals können den Schülerinnen und Schülern vielfältige Zugänge zu mathematischen Themen ermöglicht werden. Neben Arbeitsmitteln wie dem 20er- und dem 100er-Feld aus Holz könnten Zählkisten, Holzwürfel, Uhren, Messbänder und diverse weitere Materialien und Spiele (z.B. Denkschule) zur Verfügung stehen.

4 Kinder begegnen Mathematik, Ordner Kindergarten, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

5 Das Zahlenbuch – Spiele zur Frühförderung 1 und 2, Klett und Balmer Verlag Zug.

6 Themenbücher Mathwelt 1, Schulverlag plus

## 5 Hinweise zum Zyklus 2

### 5.1 Formative Beurteilung

Die Schülerinnen und Schüler fördern ist die grundlegendste Aufgabe beim Unterrichten – im Hinblick darauf, dass sie Mathematik verstehen, anwenden und flexibel nutzen können. Die Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts und die Planung von Fördermassnahmen bedingen eine differenzierte und kontinuierliche Einschätzung von Kompetenzen, Denkweisen, Schwierigkeiten, Vorstellungen und des Lernstands der Schülerinnen und Schüler. Diese erfolgt, während sie Aufgaben bearbeiten und sich über Mathematik austauschen, somit insbesondere bei der Lernbegleitung.

Gesichtspunkte zur Diagnose und Förderung sind **zum einen** die im Lehrplan vorhandenen Kompetenzstufen, die bei jeder Kompetenz zu einem Kompetenzaufbau zusammengefügt sind und zeigen, was Schülerinnen und Schüler können sollen, um eine nächste Kompetenzstufe zu erreichen. Es versteht sich von selbst, dass dieser im Lehrplan dargestellte kumulative Kompetenzaufbau nur modellartig und prototypisch sein kann. Dennoch können die *Kompetenzstufen als Gesichtspunkte zur Diagnose* während der Lernbegleitung, beim Beobachten und in Gesprächen verwendet werden. Es ist wichtig, den Aufbau der einzelnen Kompetenzen nicht isoliert nebeneinander, sondern vielmehr im gegenseitigen Bezug zu verstehen.

*Ein Beispiel dazu:* Schülerinnen und Schüler müssen verstehen, was die einzelnen Grundoperationen bedeuten. Subtrahieren beispielsweise bedeutet wegnehmen, aber auch *auf dem Zahlenband bzw. Zahlenstrahl zurückschreiten* und vor allem auch den Unterschied zwischen zwei Anzahlen bilden. Das Ergebnis der Subtraktion wird bekanntlich als Differenz bezeichnet. Die Differenz wird durch Ergänzen gebildet. In diesem Sinne bedeutet subtrahieren auch *ergänzen*. Über dieses dreifache Verständnis der Subtraktion müssen Schülerinnen und Schüler verfügen, wenn sie die Subtraktion umfassend verstehen und beim Bearbeiten von Sachaufgaben anwenden wollen. Dieses Verstehen kann dadurch gefördert werden, dass der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungen der Subtraktion zu allen drei Bedeutungen (wegneh-

men, auf dem Zahlenband bzw. dem Zahlenstrahl zurückschreiten, ergänzen) als Handlung, als Bild und als Operation verdeutlicht wird (siehe Kapitel 1.4). Genau diese Fähigkeit ist im Lehrplan mit einer Kompetenzstufe beschrieben: *Die Schülerinnen und Schüler können Grundoperationen mit Handlungen, Sachbildern, Rechengeschichten und grafischen Strukturen veranschaulichen* und Veranschaulichungen interpretieren (□ Lehrplan 21 | Mathematik | Seite 19 | Kompetenzstufe d). Wer eine Grundoperation nicht veranschaulichen oder konkretisieren kann, hat sie noch nicht verstanden. Insofern kann mit einer entsprechenden Aufgabe, bei der eine Grundoperation veranschaulicht werden muss, deren Verständnis diagnostiziert werden.

So sind die Kompetenzstufen also nicht nur *vertikal innerhalb einer Kompetenz*, sondern auch *horizontal im gegenseitigen Bezug zwischen den Kompetenzen* zu lesen. Gesichtspunkte zur Diagnose und Förderung sind **zum anderen** aber auch das Wissen um den grundlegenden kumulativen Aufbau in der Mathematik. Wenn Schülerinnen und Schüler beispielsweise im 3. Schuljahr nicht über ein Zahlverständnis verfügen, ergibt das Operieren nicht wirklich Sinn, weil es dann einem Hantieren mit Zahlen ohne deren Verständnis entspricht. In diesem Sinne ist das Zahlverständnis Voraussetzung für die Entwicklung des Operationsverständnisses. Und beide sind Voraussetzung dafür, dass die Schülerinnen und Schüler sodann Grössen verstehen und mit ihnen umgehen können.

In der Mathematikdidaktik spricht man von Grundkonzepten und Grundvorstellungen, die die Schülerinnen und Schüler verstehen müssen, wenn sie erfolgreich weiterlernen wollen. Die Wichtigsten für den Zyklus 2 werden nachfolgend aufgeführt.

## Grundkonzepte und Grundvorstellungen – Verstehensgrundlagen für erfolgreiches Weiterlernen in der Mathematik

### Zahlverständnis

- » Flexibel zählen: von einer beliebigen Zahl aus in angemessenen Schritten vorwärts- und rückwärtszählen
- » Anzahlvorstellungen: Anzahlen strukturiert erfassen
- » Zahlen mit Anzahlen in der Alltagswelt in Beziehung setzen
- » Teil-Ganzes-Konzept: zerlegen und ergänzen
- » Stellenwertsystem: bündeln und entbündeln (Bündelungsprinzip), Bedeutung der Stellenwerte (Stellenwertprinzip)

### Operationsverständnis

- » Verdoppeln und halbieren
- » Operationen in verschiedene Darstellungsebenen übersetzen bzw. konkretisieren und abstrahieren: handlungsmässige, bildliche und symbolische Darstellungen sowie Rechengeschichten (Bezug zum Alltag)
- » Grundvorstellungen zu den Grundoperationen
  - » Addition: hinzufügen, zusammenfügen, voranschreiten (je mit den Tauschaufgaben, z. B.  $8 + 4 = 12$  |  $4 + 8 = 12$ )
  - » Subtraktion: wegnehmen, ergänzen, rückwärtsschreiten, Zusammenhang mit Addition
  - » Multiplikation: räumlich-simultan im Punktfeld darstellen, zeitlich-sukzessiv darstellen und mehrfach gleich viel hinzufügen, proportional, kombinatorisch (je mit den Tauschaufgaben, z. B.  $3 \bullet 8 = 24$  |  $8 \bullet 3 = 24$ ), von-Deutung (bei der Multiplikation mit rationalen Zahlen), Umkehraufgabe zur Division
- » Division: verteilen, aufteilen bzw. passen in
- » Flexibel und somit der Aufgabe angepasst addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (auf eigenen Wegen mit Notieren rechnen)
- » Im Kopf rechnen: verdoppeln und halbieren, auf Stufenzahlen ergänzen, Produkte kennen, Einspluseins mit wenigen Wertziffern, Zehner- und Hunderter-Einmaleins usw., durch einstelligen Divisor dividieren
- » Überschlagsrechnen (mit gerundeten Zahlen rechnen)

### Verständnis der rationalen Zahlen und der Grundoperationen mit Brüchen

- » Bedeutsame Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Malle 2004): Teil eines Ganzen ( $\frac{3}{4}$  von 1), relativer Anteil ( $\frac{3}{4}$  von ...), Resultat einer Division ( $\frac{3}{4} = 3 : 4$ ), Verhältnis ( $\frac{3}{4} = 3 : 4$ , also 3 zu 4), Quasiordinalzahl  $x$  ( $\frac{1}{4}$  = jeder Vierte) Weniger bedeutsam: Vergleichsoperator ( $\frac{3}{4}$  mal so viele wie ...), absoluter Anteil ( $\frac{3}{4}$  = drei von vier), Quasikardinalzahl ( $\frac{3}{4}$  = 3 Viertel)

- » Bruchzahlen mit Modellen: Strecken-, Kreis- und Rechteckmodell, Punktfeld, Grössenmodell
- » Stellenwerte von Dezimalzahlen
- » Prozentverständnis (relativer Anteil von ...)
- » Rationale Zahlen in verschiedenen Schreibweisen (Bruch-, Dezimal- und Prozentschreibweise)
- » Brüche, Dezimalzahlen und Prozentzahlen je in die beiden anderen Schreibweisen übertragen
- » Grundoperationen mit Brüchen mit dem Rechteckmodell (Multiplikation mit der Von-Deutung)

### Grössenverständnis

- » Repräsentanten (Stützpunktvorstellungen) zu Bezugsgrössen/Referenzgrössen
- » Grössen schätzen und messen
- » Einsicht in das System der Masseinheiten/Beziehungen zwischen Masseinheiten (Zeit, Geld, Länge, Gewicht, Hohlmasse, Fläche, Volumen)
- » Grössenverständnis in Sachsituationen (mit Grössen rechnen und Grössen umrechnen)

### Funktionsverständnis

- » Verständnis von Zahlbeziehungen
- » Proportionalitätsverständnis
- » Beziehung zwischen zwei Zahlen oder zwei Grössen
- » Regelmässige (proportionale) Veränderbarkeit von zwei Grössen
- » Begriff des Verhältnisses: Division, Bruch, Prozent, zusammengesetzte Grössen
- » Proportionalität in Sachsituationen

### Verständnis von Raumlage, Form und Figur

- » Raumlagebegriffe
- » Form: Flächen- und Umfangbegriff, Formen zerlegen und zusammensetzen
- » Figur: Volumenbegriff, Figuren zerlegen und zusammensetzen

Grundlegend wichtig ist sodann der *Umgang mit Sachaufgaben*. Er erfordert ein Text- und Situationsverständnis sowie die Fähigkeit zu mathematisieren. Dafür wie auch für das Mathematikbetreiben allgemein ist eine flexible *Verwendung von Strategien* und somit ein *Strategiebewusstsein* erforderlich (siehe Kapitel 1.1 überfachliche Kompetenzen). Dieses wird insbesondere über das Erforschen und mittels Reflexion erworben.

### 5.2 Hinweise auf ausgewählte reichhaltige Aufgaben im Schweizer Zahlenbuch 3, 4, 5, 6

Das Schweizer Zahlenbuch und MATHWELT 2 enthalten grundsätzlich viele reichhaltige Aufgaben. Die Beispiele in den Kapiteln 2.3 und 2.4 verdeutlichen, dass das Potenzial einer Aufgabe erkannt und ausgeschöpft werden muss. Wenn eine Aufgabe genau so wie sie im Lehrmittel dargestellt ist, den Schülerinnen und Schülern zur Bearbeitung aufgetragen wird, besteht die Begrenzung, dass sie lediglich abgearbeitet wird. Zur Ausschöpfung des Aufgabenpotenzials sind meistens ergänzende Arbeitsanweisungen an die Schülerinnen und Schüler erforderlich. Hier ein Beispiel zu strukturierten Päckchen in der Art der folgenden Aufgabe:

|          |          |           |          |           |          |           |
|----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| <b>3</b> | <b>A</b> | 452+3     | <b>B</b> | 665+60    | <b>C</b> | 180+800   |
|          |          | 452+4     |          | 565+50    |          | 190+800   |
|          |          | 452+5     |          | 465+40    |          | 200+800   |
|          |          | 452+6     |          | 365+30    |          | 210+800   |
|          |          | ... + ... |          | ... + ... |          | ... + ... |

Schweizer Zahlenbuch 3 | Schulbuch | Seite 49 | Aufgabe 6

Alle Teilaufgaben A bis C sind mehr oder weniger strukturiert. Ohne ergänzende Arbeitsanweisungen berechnen die Schülerinnen und Schüler lediglich die Ergebnisse. Sie setzen sich jedoch nicht mit den Strukturen auseinander.

Zur Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts und somit zur Förderung mehrerer Handlungsaspekte und Kompetenzen sind ergänzende Arbeitsanweisungen erforderlich, beispielsweise in der folgenden Art:

- » Ordne die Rechnungen nach der Grösse der Ergebnisse.
- » Verändere gegebenenfalls die einzelnen Rechnungen, sodass vollständige Regelmässigkeiten entstehen.
- » Beschreibe die Regelmässigkeiten.
- » Begründe die Regelmässigkeiten.
- » Führe die Päckchen oben und unten weiter.
- » Berechne das 8. Ergebnis, ohne alle weiteren Rechnungen aufzuschreiben.

- » Finde ähnliche Päckchen mit Regelmässigkeiten.
- » Finde ein Päckchen, bei dem sich die Ergebnisse immer um 8 unterscheiden.

Grundsätzlich können bei strukturierten Päckchen immer wieder Arbeitsanweisungen in der Art aufgenommen werden.

### 5.3 Summative Beurteilung mit Lernkontrollen

Im Rahmen einer umfassenden Beurteilung gilt es weiterhin, Lernkontrollen als summativen Bewertungsanlass durchzuführen. Mit der Neuauflage des Schweizer Zahlenbuchs (ZB3 2022/ZB4 2023/ZB5 2017/ZB6 2018) wurde das Angebot stark ausgebaut. Im Onlineportal (unter [meinklett.ch](http://meinklett.ch)) sind für alle Lernumgebungen der Grundlegung (LU 10–31) Lernkontrollen im Word-Format verfügbar. Eine ausführliche Beschreibung findet sich an gleicher Stelle unter «Didaktischer Kommentar zu den Lernkontrollen». Diese Beschreibung ist auf dem Fächernet verfügbar.

Für den eigenen Unterricht sollen Lernkontrollen als summative Bewertungsanlässe mit den Aufgaben aus den 22 verfügbaren Lernkontrollen zusammengestellt werden. Im Fokus dieser Bewertungsanlässe stehen meistens die Tätigkeiten Operieren und Benennen. Trotzdem können die Aspekte Mathematisieren und Darstellen auch aufgenommen werden. Jedoch stehen bei der Bewertung von Lernkontrollen Kompetenzen zum Erforschen und Argumentieren meistens nicht im Fokus.

Weiterführende Hinweise zur formativen und zur summativen Beurteilung finden sich im Kapitel «Beurteilen und Fördern im Förderkreislauf» im Schweizer Zahlenbuch 5, Ausgabe 2017, Begleitband S. 222 f. Das Dokument ist auch im Fächernet verfügbar.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Mit Einführung des LP21 im August 2018 sind demnach für das 5. und 6. Schuljahr ausführliche Materialien für Lernzielkontrollen vorhanden. Für das 3. und 4. Schuljahr werden als Übergangslösung Lernkontrollen im Fächernet bereitgestellt.

### 5.4 Summative Beurteilung von Produkten

Wie in Kapitel 3.3 erläutert, wird im kompetenzorientierten Mathematikunterricht die summative Beurteilung mit Lernkontrollen ergänzt durch Beurteilungsanlässe mit reichhaltigen Aufgaben und durch eine Bewertung von Lernprozessen (siehe Kapitel 5.5). Bei Produktbewertungen werden die Leistungen der Schülerinnen und Schüler nach qualitativen Kriterien eingeschätzt. Die im Kapitel 2.3 dargestellte reichhaltige Aufgabe («Zahlen an der Stellentafel bilden und ordnen») kann grundsätzlich nicht nur als Lernanlass, sondern auch als Beurteilungsanlass verwendet werden.

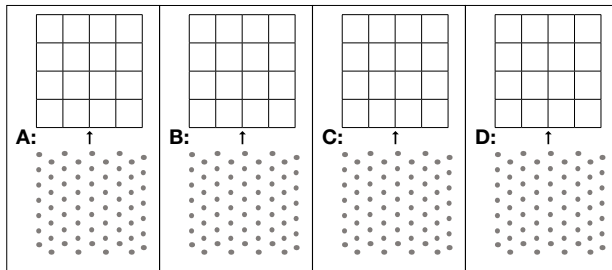
Für diesen Fall werden die Produkte der Schülerinnen und Schüler sodann nach diesen qualitativen Kriterien bewertet:

| Bewertungskriterien zur Aufgabe<br>«Zahlen an der Stellentafel bilden und ordnen» (siehe Kapitel 2.3)                           | Unge-<br>nütend | Genü-<br>gend | Gut | Sehr<br>gut |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------|-----|-------------|
| Du bildest mehrere Zahlen mit Plättchen und schreibst diese richtig auf.                                                        |                 |               |     |             |
| Du ordnest deine Zahlen nach einem erkennbaren System.                                                                          |                 |               |     |             |
| Du berechnest die Differenzen zwischen den gebildeten Zahlen richtig.                                                           |                 |               |     |             |
| Du erkennst ein Muster, wenn du mit 1, 2, 3, 4, x Plättchen Zahlen bildest, und formulierst dieses nachvollziehbar und richtig. |                 |               |     |             |
| Du erkennst bei den berechneten Differenzen Gemeinsamkeiten.                                                                    |                 |               |     |             |
| Du suchst nach Begründungen der festgestellten Gemeinsamkeiten.                                                                 |                 |               |     |             |
| <b>Bewertung</b><br><b>Note</b>                                                                                                 |                 |               |     |             |

Ausgehend von den einzelnen Kriterieneinschätzungen wird eine Produktbewertung mit «ungenütend», «genütend», «gut», «sehr gut» vorgenommen. Bei Bedarf lässt sich die Bewertung auch mit einer Note erfassen.

**Beispiel einer Produktbewertung für das 5./6.****Schuljahr***Mit Würfeln bauen und zeichnen*

Aufgabe 1: Baue mit drei Würfeln alle verschiedenen Gebäude auf das Spielfeld. Es gibt vier Möglichkeiten. Fülle von jedem Gebäude den richtigen Bauplan aus. Durch Umlegen eines einzelnen Würfels kannst du alle vier Lösungen nacheinander bauen. Finde eine Reihenfolge.



Aufgabe 2: Baue mit vier Würfeln möglichst viele verschiedene Gebäude. Bestimme das Gebäude jeweils korrekt auf dem Bauplan. Zeichne das Gebäude auf das Punktpapier.

Versuche jedes Mal, nur einen Würfel anders zu platzieren. Achte darauf, dass man deine Strategie beim Forschen erkennen kann. Du sollst am Ende des Forscherauftrags dein Vorgehen und deine Überlegungen kurz beschreiben. Schaue gut, dass du keine doppelten Gebäude aufzeichnest.

Aufgabe 3: Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

Die Produkte der Schülerinnen und Schüler können nach diesen qualitativen Kriterien bewertet werden:

| Bewertungskriterien zur Aufgabe<br>«Mit Würfeln bauen und zeichnen»                                                          | Unge-<br>nützlich | Genü-<br>gend | Gut | Sehr<br>gut |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------|-----|-------------|
| Du bestimmst die vier Baupläne korrekt, zeichnest diese korrekt auf das Punktpapier und findest eine passende Reihenfolge.   |                   |               |     |             |
| Du findest möglichst viele verschiedene Gebäude mit den vier Würfeln und bestimmst die Baupläne korrekt.                     |                   |               |     |             |
| Deine gefundenen Gebäude zeichnest du richtig auf das Punktpapier.                                                           |                   |               |     |             |
| Dein systematisches Vorgehen ist erkennbar und nachvollziehbar (du änderst jeweils nur einen Würfel von Gebäude zu Gebäude). |                   |               |     |             |
| Du hast deine Überlegungen und dein Vorgehen nachvollziehbar dargestellt und beschrieben.                                    |                   |               |     |             |
| <b>Bewertung<br/>Note</b>                                                                                                    |                   |               |     |             |

Auch hier wird die Produktbewertung ausgehend von den einzelnen Kriterieneinschätzungen mit «ungenützlich», «genügend», «gut», «sehr gut» vorgenommen. Bei Bedarf lässt sich die Bewertung auch mit einer Note erfassen.

Auf dem Fächernet sind ein Auftragsblatt für die Schülerinnen und Schüler sowie Ausführungen und Lösungen für die Lehrperson verfügbar.

Weitere Beispiele von Produktbewertungen sind auf dem Fächernet verfügbar.

### Hinweis auf die Publikation des Schulverlags plus:

Wälti, Beat (2018). **Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten**. Zyklus 2. Bern: Schulverlag plus AG.

Das Handbuch für Lehrpersonen (Print und digital, inkl. Klassenmaterial) erscheint im Herbst 2018.

Kurzbeschreibung: Im kompetenzorientierten Unterricht nach Lehrplan 21 wird die Beurteilung breiter abgestützt. Das Handbuch enthält 21 vorbereitete mathematische Lernanlässe (inkl. Material und Hinweisen zur Durchführung), aus welchen Produkte verschiedener Art hervorgehen. Auf die Aufgaben zugeschnittene Kriterienraster zeigen den Lernenden, was von ihnen erwartet wird und geben den Lehrpersonen ein passendes Instrument für die Beurteilung in die Hand. Das Handbuch ist integrierender Bestandteil des Lehrmittels «MATHWELT 2». Die Vorschläge zu Produktbewertungen können begleitend zu allen empfohlenen Lehrmitteln eingesetzt werden.

Weitere Informationen unter [www.mathe-bewerten.ch](http://www.mathe-bewerten.ch)

ausgehend von einer Unterrichtssequenz oder einer Aufgabe. Die Lernprozesse werden nach den fünf Aspekten eingeschätzt. Diese Aspekte und ihre Konkretisierungen bilden ein umfassendes Set von Bereichen zur Beurteilung der Lernprozesse (siehe Tabelle in Kapitel 3.3). Die Lehrperson trifft eine Auswahl und setzt bewusst Schwerpunkte, an denen gearbeitet wird und die anschliessend bewertet werden.

### Beispiel zur Beurteilung der Lernprozesse

Die Schülerinnen und Schüler einer Mischklasse im 3. und 4. Schuljahr haben über einige Wochen mehrere Aufgaben gelöst, bei denen sie systematisch vorgehen sowie Beobachtungen und Ergebnisse systematisch – zum Beispiel in Form einer Tabelle – darstellen mussten. Alle Aufgaben erforderten eine erforschend-fragende Haltung.

### Hier eine Auswahl der bearbeiteten Aufgaben:

Aufgabe 1: Welche Zahlen kannst du mit 3 Plättchen in der Stellentafel mit 3 resp. 4 Stellen bilden, und was stellst du fest, wenn du die Differenzen der gebildeten Zahlen vergleichst? (in Anlehnung an das Aufgabenbeispiel in Kapitel 2.3) Diese Aufgabenstellung wäre weiter ausbaubar, indem man mit der Anzahl Plättchen oder der Anzahl Stellen in der Stellentafel variiert oder die gebildeten Zahlen durch 9 dividiert.

Die Schülerinnen und Schüler konnten sich nach der Einzelarbeit austauschen. Bei der Durchführung wurde sichtbar, dass eine Mehrheit der Schülerinnen und Schüler systematisch vorgegangen ist und ein Ordnungssystem verwendet hat. Trotz einem entsprechenden Hinweis in der Aufgabenstellung fehlte das schriftliche Festhalten der Erkenntnisse. Dieser Punkt wurde im Anschluss an die Arbeit im Plenum thematisiert, indem mögliche Satzanfänge vorgegeben wurden, die die Schülerinnen und Schüler in Zukunft verwenden können.

- » Ich habe die Stellenwerttabelle gezeichnet, weil ...
- » Ich habe die Differenzen untereinander geschrieben, weil ...
- » Ich habe Hilfsmaterial geholt, dass ich ...
- » Ich habe die Resultate/Differenzen/Zahlen verglichen und festgestellt, dass ...

## 5.5 Summative Beurteilung der Lernprozesse

Wie in Kapitel 3.3 erläutert, bezieht sich in der Mathematik eine summative Beurteilung eines Lernprozesses entweder auf ein Produkt, das über einen längeren Zeitraum von einigen Wochen bis hin zu einigen Monaten (Quartal) entstanden ist oder auf die Umsetzung

» Es fällt mir auf, dass ...

Danach wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, ihre Erkenntnisse festzuhalten. Die dabei entstandenen Dokumente wurden schliesslich nach den Aspekten *Gelerntes darstellen* und *Selbstständig arbeiten* bewertet.

Aufgabe 2: Die Schülerinnen und Schüler untersuchten regelmässige Körper und versuchten, Zusammenhänge zwischen Ecken, Kanten und Flächen zu entdecken. Die Dokumente der Schülerinnen und Schüler konnten danach eingeschätzt werden, inwiefern sie Zusammenhänge erkannt und die erarbeiteten Daten sauber sowie übersichtlich dargestellt haben.

Die bei Aufgabe 1 erarbeitete Fähigkeit, Zahlen miteinander zu vergleichen, wurde bei dieser Aufgabe 2 sehr gut genutzt.

Aufgabe 3: Die Schülerinnen und Schüler wählten zwei Ziffernkarten, bildeten daraus die grössere Zahl und subtrahierten die Umkehrzahl. Die Erkenntnisse wurden hier sehr ausführlich dargestellt. Durch das systematische Vorgehen erkannten sie viele mathematische Zusammenhänge. Auch hier wurden die erarbeiteten Satzanfänge wiederverwendet.

Im Hinblick auf die Bewertung der Lernprozesse bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler die nachfolgende Aufgabe 4 und formulierten ihre Vorgehensweisen. Dazu mussten sie selbstständig arbeiten und ihre Dokumente abgeben.

*Aufgabe 4: In der Weihnachtszeit werden 100 Gebäcke gebacken. Damit es nicht zu langweilig wird, wird jedes dritte Gebäck mit einer Glasur überzogen, jedes vierte mit einer Nuss und jedes fünfte mit einem Zuckerstern dekoriert. Wie viele Gebäcke weisen alle drei Dekorationen auf?*

Bei der Bewertung der Dokumente der Schülerinnen und Schüler und somit bei der Bewertung ihrer Lernprozesse wurden die folgenden drei Aspekte fokussiert: *Gelerntes darstellen* (Gelerntes in eigenen Worten fachlich richtig darstellen), *Strategien verwenden*

(probieren, vergleichen, ordnen) und *Selbstständig arbeiten* (eigene Denkleistung erbringen, Hilfsmittel wie eigene Darstellungsformen verwenden) – siehe Kapitel 3.3. Weil die Aspekte nicht trennscharf sind, können gleichwertige Informationen zu den Fähigkeiten bei verschiedenen Aspekten gewonnen werden.

Zwei Schülerinnen/Schüler zeichneten das Hunderterfeld und entdeckten dadurch, dass es nur ein Gebäck gibt, das alle drei Dekorationen erhält. Leider fehlte bei ihnen eine Begründung ihrer Darstellung. In einem Fall wurde die Aufgabe noch weiterentwickelt. Dabei wurde beschrieben, welche Gebäcke die nächsten wären, die alle drei Dekorationen bekommen würden. So wurde einige Male die Teilbarkeit erwähnt.

Die Dokumente der Schülerinnen und Schüler wurden sodann nach folgenden Kriterien bewertet:

| Kriterien zur Bewertung der Lernprozesse                                                          | Unge-nügend | Genü-gend | Gut | Sehr gut |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----------|-----|----------|
| Du beginnst deine Arbeit selbstständig<br>( <i>Selbstständig arbeiten</i> )                       |             |           |     |          |
| Du ordnest deine Zahlen und vergleichst sie<br>( <i>Strategie verwenden</i> )                     |             |           |     |          |
| Du stellst das Gelernte in eigenen Worten fachlich richtig dar<br>( <i>Gelerntes darstellen</i> ) |             |           |     |          |
| Du verwendest Hilfsmittel effizient<br>( <i>Selbstständig arbeiten</i> )                          |             |           |     |          |
| Du arbeitest zielorientiert<br>( <i>Selbstständig arbeiten</i> )                                  |             |           |     |          |

Die Bewertung der Lernprozesse wird ausgehend von den einzelnen Kriterieneinschätzungen mit «ungenügend», «genügend», «gut», «sehr gut» vorgenommen. Bei Bedarf lässt sich die Bewertung auch mit einer Note erfassen.

Im Kapitel 6.4 ist mit je einem Beispiel dargestellt, in welcher Art ein *Merkheft* und wie Verbesserungen zur Bewertung der Lernprozesse genutzt werden können. Diese Beispiele aus dem Zyklus 3 können auf den Zyklus 2 übertragen werden. Insofern lassen sich auch im Zyklus 2 das *Merkheft* und Verbesserungen zur Bewertung der Lernprozesse nutzen.

### 5.6 Beispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung im 4. und 5. Schuljahr

Grundlage zur Bildung der Note im Beurteilungsbericht ist eine Gesamteinschätzung der Leistungen bei Produkten, Lernkontrollen und Lernprozessen (siehe Kapitel 3.3). Die Leistungen zu den drei Beurteilungsgegenständen können in der Dokumentation der summativen Beurteilung aufgenommen werden. Ein Beispiel einer *Dokumentation der summativen Beurteilungen* für das 5. Schuljahr liegt hier vor:

 [http://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten\\_volksschule/kindergarten\\_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html](http://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten_volksschule/kindergarten_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html)

→ *Ausgefülltes Musterbeispiel Mathematik*

In Ergänzung dazu wird auf der nächsten Seite im Folgenden ein *Musterbeispiel für das 4. Schuljahr* dargestellt.

Musterbeispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung für das 4. Schuljahr

| Datum                | Produkte                                                                                                                         | Fokussierte Handlungsaspekte |     |     | Prädikat/Note |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----|-----|---------------|
|                      |                                                                                                                                  | O&B                          | E&A | M&D |               |
| August/<br>September | Zahlenmauern mit aufeinanderfolgenden Basiszahlen erforschen und Erkenntnisse formulieren und festhalten                         | x                            | x   | x   | gut           |
| Oktober/<br>November | Stellenwerttabelle<br>Zahlen an der Stellenwerttabelle verändern<br>Ordnen, vergleichen, Zahlen systematisch suchen              | x                            | x   | x   | genügend      |
| Februar/<br>März     | Den eigenen Tagesablauf dokumentieren, verschiedene Tätigkeiten auf Woche/Monat/Jahr berechnen                                   | x                            | x   | x   | gut           |
| April/<br>Juni       | Den eigenen Wasserverbrauch berechnen<br>Schätzen, messen, ordnen, darstellen, argumentieren<br>Schwergewicht Hohlmasse und Zeit | x                            | x   | x   | sehr gut      |

| Datum     | Lernkontrollen                                                                                                                                             | Fokussierte Handlungsaspekte |     |     | Prädikat/Note |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----|-----|---------------|
|           |                                                                                                                                                            | O&B                          | E&A | M&D |               |
| September | Überblick und Wiederholung, Malkreuz (Ziffernkarten), Rechenbaum, Sachrechnen mit Zeit und Grössen, Zahlenmauern und Zahlenfolgen                          | x                            |     | x   | 4,5           |
| November  | Orientierung im Millionenraum, Ergänzen auf eine Million, Teilen von Stufenzahlen, Stellentafel, Orientierung am Zahlenstrahl                              | x                            | x   | x   | 5,5           |
| Januar    | Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division im Millionenraum, Sachrechnen mit Gewichten, Geobrett und Schätzen                                      | x                            |     | x   | 4,5           |
| März      | Schriftliche Multiplikation, Schauen und Bauen, Vergrössern, Preistabellen, Vergleichen von Wegstrecken und Berechnen von Differenzen                      | x                            |     | x   | 5             |
| April     | Schriftliche Division, Sachrechnen in lebensweltlichen Situationen, Arbeit mit dem Geodreieck                                                              | x                            |     | x   | 4             |
| Juni      | Erforschen von TILL- oder ANNA-Zahlen, Stellentafel, Zahlenmauern, Sachrechnen in lebensweltlichen Situationen, Erfinden von Aufgaben mit gegebenen Zahlen | x                            | x   | x   | 4,5           |

| Datum                | Lernprozesse                                                                                                                                                                                                                              | Fokussierte Aspekte |    |    |    |    | Prädikat/Note |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|----|----|----|---------------|
|                      |                                                                                                                                                                                                                                           | Lr                  | Gd | Fn | Sv | Sa |               |
| Oktober/<br>November | Bei Aufgaben, bei denen Strategien bewusst eingesetzt werden müssen, geht NN nach wie vor unstrukturiert vor. Er nimmt Förderhinweise von LP und Mitschülern nur bedingt auf.                                                             |                     |    | x  | x  |    | ungenügend    |
| Januar               | NN nimmt Förderhinweise auf, braucht und gibt Mitlernenden Rückmeldungen zu Fragen und Lösungsvorschlägen.                                                                                                                                |                     |    | x  |    |    | gut           |
| März                 | Nach der reichhaltigen Aufgabe mit der Stellentafel beschreibt NN das Gelernte korrekt und nachvollziehbar im Merkheft. Er kann seine Fehler beschreiben und produktiv nutzen und macht gezielt Verbesserungen bei fehlerhaften Aufgaben. |                     | x  | x  |    |    | gut           |
| Juni                 | NN setzt Strategien bewusster ein. Beschafft sich nützliche Informationen zum eigenen Wasserverbrauch. Reflektiert seine Lernfortschritte und deren Gründe genau.                                                                         | x                   | x  |    |    |    | gut           |

Besonders zu beachten sind die Empfehlungen zur Gewichtung der drei Beurteilungsgegenstände bei der Bildung der Note für den Beurteilungsbericht (siehe Kapitel 3.3, letzter Abschnitt).

### 5.7 Hinweise zur Planung

Dem Schweizer Zahlenbuch und in MATHWELT 2 liegen ein vielfältiges Angebot an Aufgabenstellungen und Lernumgebungen zugrunde. Im Schweizer Zahlenbuch<sup>8</sup> finden sich zum Anfang des Schuljahres Lernumgebungen im Sinne der Wiederholung und Überprüfung des bereits Gelernten. Nachfolgend nimmt die Grundlegung den grössten Raum ein. Zum Ende hin werden Themen zur Vertiefung und Weiterführung wie auch Ideen für Projekte aufgegriffen. Dies alles gilt es, im Laufe des ganzen Schuljahres sinnvoll einzusetzen. Da bedeutend mehr Lerngelegenheiten als vorhandene Schulstunden zur Verfügung stehen, muss eine Auswahl getroffen werden. Hierzu stehen im Fächernet unter «Hinweise zur Planung» Vorschläge für beide Lehrmittel pro Schuljahr bereit. Wichtig ist, dass diese Planung dem jeweiligen Leistungsstand einer Klasse durchaus angepasst werden kann.

Im Unterricht geht es in keinster Weise darum, das ganze Lehrmittel durchzuarbeiten. Wichtig für eine entschlackte Jahresplanung ist ein Bewusstsein, dass aus der getroffenen Auswahl der Lernumgebungen auch nicht alle Aufgaben bearbeitet werden müssen. Ein Thema, eine Seite, eine Doppelseite kann und soll deshalb unterschiedlich viel Zeit in Anspruch nehmen. So steht statt eines stofflichen Drucks vielmehr das erfolgreiche Lernen und damit das nachhaltige Verstehen im Vordergrund. Deshalb sind die Jahresplanungen so aufgebaut, dass aus dem breiten Angebot bewusst eine Auswahl getroffen wurde. Ausgehend von dieser werden an allen anzustrebenden Grundansprüchen gearbeitet. Diese werden im Laufe der Schuljahre mehrfach fokussiert, weshalb auch nicht die Bearbeitung einer einzigen Lernumgebung das Erreichen der entsprechenden Kompetenzstufe zum Ziel hat. Es ist die wiederholte Auseinandersetzung in verschiedenen Kontexten und mit unterschiedlichen Darstellungen, die letztlich das Verständnis ermöglicht.

Neben der inhaltlichen Planung und der Klärung der Unterrichtsmethode übt auch die Raumgestaltung einen günstigen Einfluss auf die Unterrichtsqualität aus. Die Lernenden sollen immer wieder über die Sache selbst

reden und so in einen Dialog treten können. Dies in kleinen, aber wiederholt auch in grösseren Gruppen. So kann ein Konferenztisch als Ausgangspunkt für wichtige Phasen des Austauschs dienen. Neben den kurzen Wegen untereinander ist es wichtig, dass für die Lernenden die verwendeten Materialien wie auch Hilfsmittel griffbereit sind und je nach Bedarf eingesetzt werden können.

Analog einer Lesecke kann eine Denkspielkiste mit mathematischen Materialien Schülerinnen und Schüler anregen. Dabei bearbeiten sie alleine oder in Kooperation weiterführende Probleme und Knobelaufgaben oder sie spielen. Wichtig scheint in diesem Zusammenhang, dass nicht die Menge an angebotenen Lernspielen es ausmacht, sondern deren Qualität. Mögliche Vorschläge finden sich im Fächernet.

## 6 Hinweise zum Zyklus 3

### 6.1 Formative Beurteilung

Kapitel 5.1 enthält konkrete Hinweise für den Umgang mit der formativen Beurteilung, die mehrheitlich auch für den Zyklus 3 verwendet werden können. Allgemeine Hinweise zur formativen Beurteilung sind in Kapitel 3.2 dargelegt.

An dieser Stelle sei auf das mathbuch IF, Begleitband für die integrative Förderung Klassen 7 bis 8, verwiesen. Es enthält einerseits allgemeinere Hinweise zur wirksamen Förderung und zur integrativen Förderung (S. 7–9). Andererseits sind zu einzelnen Lernumgebungen im mathbuch 1 und im mathbuch 2 jeweils auf der ersten Seite Voraussetzungen beschrieben, über die die Schülerinnen und Schüler verfügen sollten, wenn sie die jeweilige Lernumgebung bearbeiten wollen. Diese Voraussetzungen geben zugleich Hinweise darauf, welche Aspekte gefördert werden müssen, wenn sie noch nicht vorliegen. Und auf der letzten Seite einer jeweiligen Lernumgebung sind mögliche Schwierigkeiten und weitere Förderhinweise aufgeführt.

<sup>8</sup> Weitere Hinweise sind im Begleitband zum Zahlenbuch 5, Ausgabe 2017, S.46 zu finden. Dieses Dokument ist im Fächernet verfügbar.

<sup>9</sup> Da das Lehrmittel MATHWELT 2 nicht als Jahrgangslehrmittel konzipiert ist, ist ein solcher Wiederholungs- und Vertiefungsteil nicht explizit vorgesehen.

## 6.2 Beispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung im 7. Schuljahr

Grundlage zur Bildung der Note im Beurteilungsbericht ist eine Gesamteinschätzung der Leistungen bei Produkten, Lernkontrollen und Lernprozessen (siehe Kapitel 3.3). Die Leistungen zu den drei Beurteilungsgegenständen können in der Dokumentation der summativen Beurteilung aufgenommen werden. Ein Beispiel einer Dokumentation von summativen Beurteilungen für das 5. Schuljahr liegt hier vor:

🔗 [https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten\\_volksschule/kindergarten\\_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html](https://www.erz.be.ch/erz/de/index/kindergarten_volksschule/kindergarten_volksschule/beurteilung-lehrplan-21/dokumentationen-zur-summativen-beurteilung.html)

→ Ausgefülltes Musterbeispiel Mathematik

In Ergänzung dazu wird im Folgenden ein *Musterbeispiel für das 7. Schuljahr* dargestellt. Je ein Beispiel für das 8. und 9. Schuljahr ist auf dem Fächernet verfügbar.

Besonders zu beachten sind die *Empfehlungen zur Gewichtung der drei Beurteilungsgegenstände* bei der Bildung der Note für den Beurteilungsbericht (siehe Kapitel 3.3, letzter Abschnitt).

### Musterbeispiel einer Dokumentation zur summativen Beurteilung für das 7. Schuljahr

| Datum         | Produkte                                                                                                                                                                            | Fokussierte Handlungsaspekte |     |     | Prädikat/Note |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----|-----|---------------|
|               |                                                                                                                                                                                     | O&B                          | E&A | M&D |               |
| 10. September | <i>Reichhaltige Aufgabe:</i> Puzzle<br>NN schneidet die Teile genau aus und kann andere geometrische Flächen damit legen. Die Flächenberechnung der Teile bereitet ihm keine Mühe.  | x                            |     | x   | sehr gut      |
| 10. November  | <i>Fermifrage:</i> Wie viele Nadeln hat eine Tanne?<br>NN gibt sich zu schnell mit einer sehr, sehr ungefähren und nicht gut belegten Lösung zufrieden.                             | x                            | x   | x   | ungenügend    |
| 4. Februar    | <i>Reichhaltige Aufgabe:</i> Würfelspiel<br>NN begründet den Inhalt seiner eigenen Karten korrekt. Bei seiner Begründung der Trefferwahrscheinlichkeit hat es noch logische Fehler. | x                            | x   | x   | gut           |
| 29. März      | <i>Fermifrage:</i> Wie viele Liter Wasser regnet es während eines Jahres auf die Schweiz herunter?<br>NN ist systematischer und strukturierter vorgegangen.                         | x                            |     | x   | gut           |

| Datum         | Lernkontrollen                                                                                                                                    | Fokussierte Handlungsaspekte |     |     | Prädikat/Note |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----|-----|---------------|
|               |                                                                                                                                                   | O&B                          | E&A | M&D |               |
| 15. September | <i>Lernkontrolle 1</i><br>Proportionalitäten, Rechenoperationen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen                                           | x                            |     |     | 5             |
| 20. November  | <i>Lernkontrolle 2</i><br>Variable und Term: Gesetzmässigkeiten finden, mit Worten und Termen beschreiben                                         | x                            |     | x   | 4             |
| 19. Januar    | <i>Lernkontrolle 3</i><br>Parallelogramme und Dreiecke / Würfel und Quader                                                                        | x                            |     | x   | 5,5           |
| 12. März      | <i>Lernkontrolle 4</i><br>Grafische Darstellungen interpretieren und selber zeichnen / Proportionale und nicht proportionale Beziehungen erkennen | x                            |     | x   | 4,5           |
| 30. April     | <i>Lernkontrolle 5</i><br>Absolut / relativ: Zusammenhänge verstehen und nutzen                                                                   | x                            |     | x   | 4,5           |
| 3. Juni       | <i>Lernkontrolle 6</i><br>Symmetrien und Winkel / Eigenschaften von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden verstehen und konstruieren           | x                            |     | x   | 5,5           |

Bei der Bewertung von Lernkontrollen stehen Kompetenzen zum Erforschen & Argumentieren meistens nicht im Fokus. Ergebnisse von Trainingsphasen zu Fertigkeiten / Routinen (z. B. Blitzrechnen, Kopfrechenttraining) werden nicht bewertet.

| Datum         | Lernprozesse                                                                                                                                                                                                               | Fokussierte Aspekte |    |    |    |    | Prädikat/Note |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|----|----|----|---------------|
|               |                                                                                                                                                                                                                            | Lr                  | Gd | Fn | Sv | Sa |               |
| 22. September | <i>Nach der Lernkontrolle</i><br>NN setzt die Hinweise zu «Punkt vor Strich» und zu «korrekte Massangaben» präzise um.                                                                                                     |                     | x  | x  |    |    | sehr gut      |
| 10. Januar    | <i>Alle Merkhefteinträge des ersten Semesters</i><br>Man sieht, dass NN sich meistens ausführlich Gedanken zum Gelernten macht und diesen Prozess hier dokumentiert.                                                       | x                   | x  | x  |    |    | gut           |
| 20. März      | <i>Nach der Lernkontrolle</i><br>NN setzt die Hinweise zur korrekten Darstellung einer Kreisgrafik mangelhaft um. Er beschreibt aber den Unterschied proportional/nicht proportional mit klaren und verständlichen Worten. |                     | x  | x  | x  |    | genügend      |
| 10. Juni      | <i>Alle Merkhefteinträge des zweiten Semesters</i><br>Erfreut stellt man fest, dass die Reflexionen und notierten Gedanken von NN nun noch fundierter und klarer verständlich sind. Bravo!                                 | x                   | x  | x  |    | x  | sehr gut      |

### 6.3 Beispiel einer Produktbewertung

Wie im Kapitel 3.3 erläutert, wird im kompetenzorientierten Mathematikunterricht die summative Beurteilung mit Lernkontrollen ergänzt durch Beurteilungsanlässe mit reichhaltigen Aufgaben und durch eine Bewertung von Lernprozessen (siehe Kapitel 5.5). Bei Produktbewertungen werden die Leistungen der Schülerinnen und Schüler nach qualitativen Kriterien eingeschätzt. Im mathbuch ist die Bewertung von Produkten Teil des Beurteilungskonzepts. Anregungen finden sich im Begleitband auf den Übersichtsseiten (Faltblätter) zu den Lernumgebungen unter der Rubrik «Mögliche Lernsicherung».

Das folgende Beispiel «Würfelspiel» für das 7., 8. und 9. Schuljahr entstammt der Publikation des Schulverlags: Jundt, W. & Nydegger, A (2018). Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten. Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG. Im Anhang ist dieses Beispiel vollständig dargestellt. Die weiteren Beispiele sind in der Publikation ebenso gegliedert.

Siehe Seite 34.

### Würfelspiel

#### Die Spielregeln:

- » Alle Mitspielenden erhalten ein Set Bedingungskarten und legen diese offen vor sich hin.
- » Wer dran ist, würfelt mit zwei Würfeln und schaut, ob die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen.
- » Wenn die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen, wird diese auf den persönlichen Gewinnstapel gelegt.
- » Wenn die Bedingungen mehrerer Karten erfüllt sind, wird eine dieser Karten auf den Gewinnstapel gelegt.
- » Wenn keine Bedingung erfüllt ist, wird eine beliebige Karte aus dem Spiel genommen.
- » Dann ist der/die Nächste dran.
- » Pro Spielrunde verringert sich somit die Zahl der noch offenen Karten für alle Spielenden um eine Karte.
- » Das Spiel ist zu Ende, wenn keine Karten mehr offen auf dem Tisch liegen.
- » Es gewinnt, wer am Ende am meisten Karten auf seinem Gewinnstapel hat.

Das sind drei Bedingungskarten:

Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.

Beispiel (3/5)

Es liegt genau eine 6.

Beispiel (5/6)

Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.

Beispiel (5/6)

**A**

Erfinde mindestens 5 weitere Bedingungskarten mit möglichen Ereignissen zu diesem Spiel. Ihre Trefferwahrscheinlichkeit soll grösser als 0 %, aber kleiner als 100 % sein. Keine Wahrscheinlichkeit soll mehrfach vorkommen.

**B**

Überlege, wie man das Spiel gewinnen kann.

**C**

Stelle Überlegungen an zu Trefferwahrscheinlichkeiten. Welche Wahrscheinlichkeiten gelten für einzelne Ereignisse? Wie kann man diese bestimmen?

**Beurteilungskriterien**

|          |          |                                                                                                                                      |  |
|----------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>A</b> | <b>1</b> | Du formulierst eine Bedingung mit einer höheren Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.  |  |
|          | <b>2</b> | Du formulierst eine Bedingung mit einer tieferen Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das. |  |
|          | <b>3</b> | Eine deiner Bedingungen hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 25 %.                                                                 |  |
| <b>B</b> | <b>1</b> | Du beschreibst eine Strategie, die dir hilft, möglichst viele Karten zu gewinnen.                                                    |  |
|          | <b>2</b> | Du begründest, dass das Spiel weder ein reines Glücksspiel, noch ein reines Strategiespiel ist.                                      |  |
| <b>C</b> | <b>1</b> | Du bestimmst bei fünf von dir entworfenen Bedingungskarten die Trefferwahrscheinlichkeit.                                            |  |
|          | <b>2</b> | Du beschreibst, wie man durch Abzählen alle Trefferwahrscheinlichkeiten bestimmen kann.                                              |  |
|          | <b>3</b> | Du begründest 3 Trefferwahrscheinlichkeiten (von vorgegebenen oder eigenen Karten) anders als durch direktes Abzählen.               |  |

| 7 |   | 8 |   | 9 |   |
|---|---|---|---|---|---|
| G | H | G | H | G | H |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Genügend:** 3 von 5 erfüllt

**Gut:** 4 von 5 erfüllt

**Sehr gut:** 5 von 5 erfüllt

**Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.**

☐ Davon sind alle wählbar.

☐ Davon sind max. 3 wählbar.

☐ Davon sind max. 2 wählbar.

☐ Davon ist max. 1 wählbar.

**Publikationshinweis:**

Jundt, Werner & Nydegger, Annegret (2018). **Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten.** Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG.

Das Handbuch für Lehrpersonen (Print und digital, inkl. Klassenmaterial) erscheint im Herbst 2018.

Kurzbeschreibung: Im kompetenzorientierten Unterricht nach Lehrplan 21 wird die Beurteilung breiter abgestützt. Das Handbuch enthält 23 vorbereitete mathematische Lernanlässe (inkl. Material und

Hinweisen zur Durchführung), aus welchen Produkte verschiedener Art hervorgehen. Auf die Aufgaben zugeschnittene Kriterienraster zeigen den Lernenden, was von ihnen erwartet wird und geben den Lehrpersonen ein passendes Instrument für die Beurteilung in die Hand. Die Vorschläge zu Produktbewertungen können begleitend zu allen empfohlenen Lehrmitteln eingesetzt werden.

Weitere Informationen unter [www.mathe-bewerten.ch](http://www.mathe-bewerten.ch)

#### 6.4 Beispiel einer Lernprozessbewertung

Wie in Kapitel 3.3 erläutert, bezieht sich in der Mathematik eine summative Beurteilung eines Lernprozesses auf ein Produkt, das über einen längeren Zeitraum von einigen Wochen bis hin zu einigen Monaten (Quartal) entstanden ist. Diese wird nach den fünf Aspekten eingeschätzt (siehe Kapitel 3.3). Grundsätzlich bilden die Aspekte und ihre Konkretisierungen ein umfassendes Set von Bereichen zur Beurteilung der Lernprozesse. Die Lehrperson trifft eine Auswahl und setzt bewusst Schwerpunkte, an denen gearbeitet wird und die anschliessend bewertet werden.

##### Beispiele Merkheft

Die Schülerinnen und Schüler erstellen regelmässig, das heisst zu jeder Lernumgebung, Einträge in ihrem Merkheft. Das mathbuch gibt dafür im Arbeitsheft viele Hinweise, z. B.:

- a) Notiere, was für dich ganz neu war.
- b) Schreibe jemandem einen Brief, in dem steht, was du gelernt hast.
- c) Notiere, welche Zusammenhänge mit anderen Lernumgebungen dir aufgefallen sind.
- d) Notiere einen gemachten Fehler und was du daraus gelernt hast.
- e) Überlege dir, wie du mit deinen Fehlern umgehst. Nutzt du die Gelegenheit, aus deinen Fehlern etwas zu lernen?

Im Hinblick auf die Bewertung der Lernprozesse macht die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern die obigen fünf Vorgaben. In den nächsten zwei Monaten müssen sie jede Vorgabe mindestens einmal anwenden. Hinzu kommt der Auftrag, bei der Lernumgebung 16, mathbuch 2 ( $10^{\text{hoch}}$ ), mindestens vier Fotos zu positiven und negativen Exponenten zu knipsen, auszudrucken, ins Merkheft zu kleben und zu beschriften (siehe Abbildung auf der nächsten Seite mit dem Auszug aus dem Merkheft von Steffi).

Anhand dieser Vorgaben kann bei jedem Schüler und jeder Schülerin eine Bewertung der Lernprozesse zu nachfolgenden Aspekten vorgenommen werden.

##### Gelerntes darstellen

- » Das Gelernte mit eigenen Worten, Beispielen oder Skizzen fachlich richtig darstellen (Hinweis a und b)
- » Eigene Darstellungen angemessen überarbeiten, nutzen, erläutern und vergleichen (mit Zusatzauftrag  $10^{\text{hoch}}$ )
- » Lösungen und Fehler erläutern (Hinweis d und f)

##### Strategien verwenden

- » Vereinfachen (Hinweis b)
- » Ordnen (Hinweis c)
- » Analogien und Strukturen verwenden (mit Zusatzauftrag  $10^{\text{hoch}}$ )
- » Ein Problem mit eigenen Worten beschreiben oder mit Skizzen darstellen (Hinweis d)
- » Vorgehensweisen notieren (Hinweis f)

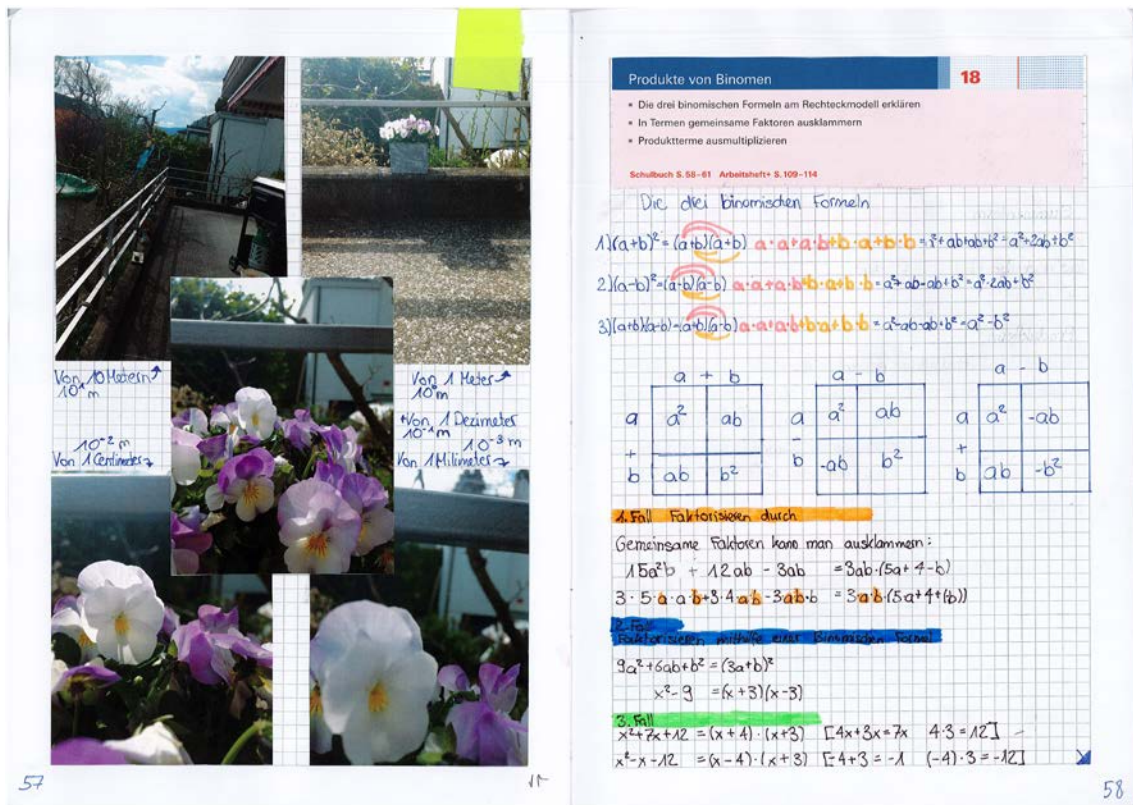


Abb.: Auszug aus dem Merkheft von Steffi, 8. Schuljahr (Fotos zu LU 16  $10^{\text{hoch}}$ , rechts der Text zu Lernumgebung 18)

### Beispiel Individuelle Verbesserungen im Rahmen einer Lernkontrolle

Pro Semester gibt man allen Schülerinnen und Schülern einmal individuelle Verbesserungen nach einer Lernkontrolle vor. So tragen die gemachten Fehler einerseits zur Förderorientierung bei, und andererseits kann die Lehrperson danach die Lernprozesse nach den Aspekten Förderhinweise nutzen und Strategien verwenden beurteilen.

Eine Lernkontrolle enthielt einen Teil, der ohne Rechner, und einen Teil, der mit Rechner bearbeitet werden musste. Zu beiden Teilen gibt die Lehrperson individuelle Hinweise für die Verbesserungen, wobei viele dieser individuellen Hinweise mehreren Schülerinnen und Schülern zugewiesen werden.

Lia beispielsweise erhielt folgende Hinweise:

Mit Rechner:

a) Was war der Grund, weshalb du Nr. 5 nicht lösen konntest?

b) Wenn die Turnhalle 36 m misst und Beat 48 Schritte braucht, um sie zu durchschreiten, kannst du seine Schrittlänge berechnen. Und danach löst du auch noch 5b).

Ohne Rechner:

c) Du weisst, dass man zuerst Klammern ausrechnet und dann Punkt vor Strich rechnen muss. Geh so bei Nr. 3b und f sowie Nr. 4 a, b und d vor. D.h.: Du schreibst die Aufgabe ins Probenheft und löst sie schrittweise. Als Hilfe zeige ich es dir bei 4c und 3a:

$$1800 : ((5 + 6 + 1) : 3) =$$

$$20 - 3 \times 5 =$$

$$1800 : ((12) : 3) =$$

$$20 - 15 =$$

$$1800 : (4) =$$

$$5$$

$$450$$

d) Zeige bei der Zahl **100,01818** auf, wo die Hundertstel und wo die Tausendstel liegen. Danach liest du die Rundungsregel nochmals gut durch und löst 1c–e.

Lena beispielsweise erhielt nur diesen einen Hinweis:

a) Wie viele g ergeben ein Kilogramm? Und wie viele dm einen Meter? Wenn du das weisst, kannst du 2c und e lösen. Schreibe danach noch 1 h 30 min in h auf, also mit Komma! (1, ... h).

Anhand dieser Vorgaben kann bei jedem Schüler und jeder Schülerin eine Bewertung der Lernprozesse bezüglich der Qualität der Ausführung der Verbesserungen zu nachfolgenden Aspekten vorgenommen werden.

*Förderhinweise nutzen*

- » Förderhinweise zur Weiterentwicklung der eigenen Kompetenzen produktiv nutzen (Lia zu c und d, Lena zu a)
- » Fehler erkennen und beschreiben sowie unbefriedigend gelöste Aufgaben bearbeiten (Lia zu a)

*Strategien verwenden*

- » Systematisch verändern (Lia zu c)
- » Bekannte Beispiele verwenden (Lia zu c)
- » Vergleichen (Lia zu b)
- » Analogien und Strukturen verwenden (Lia zu d, Lena zu a)
- » Ein Problem mit eigenen Worten beschreiben oder mit Skizzen darstellen (Lia zu a)
- » Lösungsschritte und Zwischenergebnisse notieren (Lia zu c)

Detaillierte Informationen zur Lernprozessbeurteilung finden sich auf dem Fächernet.

## 6.5 Hinweise zur Planung

Im Fächernet sind zu jedem Schuljahr zwei Varianten möglicher Wege durch das mathbuch verfügbar:

🔗 [https://www.faechnet21.erz.be.ch/faechnet21\\_erp/de/index/navi/index/mathematik/unterricht0/planen/zyklus-3.html](https://www.faechnet21.erz.be.ch/faechnet21_erp/de/index/navi/index/mathematik/unterricht0/planen/zyklus-3.html)

Dabei werden unterschiedliche Lernumgebungen weggelassen.

Zudem enthält das mathbuch im Begleitband zu jeder Lernumgebung Faltblätter (Übersichtsseiten) mit Planungsinformationen:

- » Hinweise zum Vorgehen
- » Mathematische Inhalte
- » Anwendungsfelder
- » Im Auge behalten
- » Querverbindungen
- » Tätigkeitsbereiche LP21
- » Hilfsmittel
- » Lexikon und Begriffe
- » Voraussetzungen
- » Mögliche Lernsicherung
- » Vernetzung
- » Zur Heterogenität

## Spiel-Knobel-Ecke

Auch im Zyklus 3 schätzen die Jugendlichen einen Ort, an dem Spiele (z.B. Set, Quatro!, Ricochet Robots, Black Box, Blokus 3D), Logical (z.B. von PM), Moosgummiwürfel zum Zusammensetzen und weitere Knocheien griffbereit sind. Wer noch Material der LU zum Bündelknüpfen von mathbu.ch hat, kann dies gut wieder hervorheben. Ein regelmässiges Auswechseln des Materials fördert die Attraktivität.

**Literatur**

- Bruner, Jerome S.; Olver, Rose R. und Greenfield, Patricia M. 1971. Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Kohlhammer. (Stangl, 2017)
- Hirt, Ueli und Luginbühl, Sandra. 2017. Erkunden mit System. Strategien erwerben und Verstehen fördern. In: Mathematik lehren 203/2017, S. 7–11.
- Hirt, Ueli und Wälti, Beat. 2008. Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Seelze: Klett Kallmeyer.
- Jundt, Werner und Nydegger, Annegret. 2018. Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten. Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG.
- Malle, Günther. 2004. Grundvorstellung zu Bruchzahlen. In: mathematik lehren / Heft 123. S. 4–8.
- Scherer, Petra und Moser Opitz, Elisabeth (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. Erscheint im Herbst 2018.
- Schneider, Wolfgang; Küspert, Petra und Krajewski, Kristin. 2013. Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Stuttgart: UTB.
- Seiler, Isabelle. 2015. Vierzehn Karotten, zwölf Kartoffeln. Gezielt angereicherte Freispielangebote eröffnen viele Gelegenheiten für mathematisches Tun. In: 4 bis 8. Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, 8, S. 20–21.
- Wälti, Beat. 2018. Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten. Zyklus 2. Bern: Schulverlag plus AG. Erscheint im Herbst 2018.
- Wartha, Sebastian und Schulz, Axel. 2011. Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN.
- Wittmann, Erich Christian und Müller, Gerhard N. 2007. Sachrechnen im Kopf 1/2. Basiskurs Grössen. Zug: Klett und Balmer.
- Wittmann, Erich Christian. 2012. Das Projekt «mathe 2000»: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G. N., Selter, Ch. und Wittmann, E. Ch. (Hg.). Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart: Klett, S. 263–279.

# 2 Würfelspiel

Du lernst ein Spiel kennen. Dieses ergänzt du und untersuchst es auf Gewinnchancen.

## Aufgabenstellung

### Die Spielregeln

- Alle Mitspielenden erhalten ein Set Bedingungskarten und legen diese offen vor sich hin.
- Wer dran ist, würfelt mit zwei Würfeln und schaut, ob die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen.
- Wenn die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen, wird diese auf den persönlichen Gewinnstapel gelegt.  
Wenn die Bedingungen mehrerer Karten erfüllt sind, wird eine dieser Karten auf den Gewinnstapel gelegt.
- Wenn keine Bedingung erfüllt ist, wird eine beliebige Karte aus dem Spiel genommen.
- Dann ist der/die Nächste dran.
- Pro Spielrunde verringert sich somit die Zahl der noch offenen Karten für alle Spielenden um eine Karte.
- Das Spiel ist zu Ende, wenn keine Karten mehr offen auf dem Tisch liegen.
- Es gewinnt, wer am Ende am meisten Karten auf seinem Gewinnstapel hat.

Das sind drei Bedingungskarten:

Die Zahlen ergeben  
eine gerade Summe.  
Beispiel (3/5)

Es liegt genau eine 6.  
Beispiel (5/6)

Das Produkt der beiden Zahlen  
ist durch 10 teilbar.  
Beispiel (5/6)

- A**  
Erfinde mindestens fünf weitere Bedingungskarten mit möglichen Ereignissen zu diesem Spiel.  
Ihre Trefferwahrscheinlichkeit soll grösser als 0 %, aber kleiner als 100 % sein. Keine Wahrscheinlichkeit soll mehrfach vorkommen.
- B**  
Überlege, wie man das Spiel gewinnen kann.
- C**  
Stelle Überlegungen an zu Trefferwahrscheinlichkeiten.  
Welche Wahrscheinlichkeiten gelten für einzelne Ereignisse?  
Wie kann man diese bestimmen?

## Beurteilungskriterien

|          |          |                                                                                                                                      |  |
|----------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>A</b> | <b>1</b> | Du formulierst eine Bedingung mit einer höheren Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.  |  |
|          | <b>2</b> | Du formulierst eine Bedingung mit einer tieferen Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das. |  |
|          | <b>3</b> | Eine deiner Bedingungen hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 25 %.                                                                 |  |
| <b>B</b> | <b>1</b> | Du beschreibst eine Strategie, die dir hilft, möglichst viele Karten zu gewinnen.                                                    |  |
|          | <b>2</b> | Du begründest, dass das Spiel weder ein reines Glücksspiel noch ein reines Strategiespiel ist.                                       |  |
| <b>C</b> | <b>1</b> | Du bestimmst bei fünf von dir entworfenen Bedingungskarten die Trefferwahrscheinlichkeit.                                            |  |
|          | <b>2</b> | Du beschreibst, wie man durch Abzählen alle Trefferwahrscheinlichkeiten bestimmen kann.                                              |  |
|          | <b>3</b> | Du begründest drei Trefferwahrscheinlichkeiten (von vorgegebenen oder eigenen Karten) anders als durch direktes Abzählen.            |  |

| 7 |   | 8 |   | 9 |   |
|---|---|---|---|---|---|
| G | H | G | H | G | H |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Genügend:** 3 von 5 erfüllt

**Gut:** 4 von 5 erfüllt

**Sehr gut:** 5 von 5 erfüllt

**Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.**

☐ Davon sind alle wählbar.

☐ Davon sind max. 3 wählbar.

☐ Davon sind max. 2 wählbar.

☐ Davon ist max. 1 wählbar.

Dieses Beispiel einer Produktebewertung erscheint in:  
Jundt, W. & Nydegger, A. (2018).

**Produkte im Mathematikunterricht begleiten und bewerten.**

Zyklus 3. Bern: Schulverlag plus AG.

Diese Publikation enthält weitere solche Beispiele.

## Einbettung

|                  |     | Kompetenzbereiche |     |       |
|------------------|-----|-------------------|-----|-------|
|                  |     | Z+V               | F+R | GFD+Z |
| Handlungsaspekte | O+B |                   |     | 3.A.1 |
|                  | E+A |                   |     | 3.B.2 |
|                  | M+D |                   |     | 3.C.1 |

MA.3.A.1 Begriffe und Symbole verstehen und verwenden.

MA.3.B.2 Sachsituationen zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen.

MA.3.C.1 Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren.

## Zur Sache

Es geht darum, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen abzuschätzen und genau zu bestimmen. Auch sollen strategische Überlegungen formuliert werden.

Beim Würfeln mit zwei Würfeln sind 36 verschiedene Ereignisse möglich. Daher können die Trefferwahrscheinlichkeiten abgezählt werden.

In einer 6-mal-6-Matrix können die günstigen Fälle farblich markiert werden.

Beispiel: «Genau eine 6» trifft in 10 von 36 Fällen zu. Das ergibt eine Wahrscheinlichkeit von 27,8%.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Gerade Summe

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Genau eine 6

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Produkt durch 10 teilbar

| Die 3 vorgegebenen und 9 weitere mögliche Bedingungen |                                                     | Wahrscheinlichkeit in % |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------|
| 1                                                     | Es liegen 2 Einsen.                                 | 2,777...                |
| 2                                                     | Die Zahlen ergeben die Summe 10.                    | 8,333...                |
| 3                                                     | Beide Zahlen sind grösser als 4.                    | 11,111...               |
| 4                                                     | Die Zahlen sind aufeinanderfolgend.                 | 13,888...               |
| 5                                                     | Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar. | 16,666...               |
| 6                                                     | Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt.           | 25                      |
| 7                                                     | Es liegt genau eine 6.                              | 27,777...               |
| 8                                                     | Es liegt mindestens eine 6.                         | 30,555...               |
| 9                                                     | Beide Zahlen sind grösser als 2.                    | 44,444...               |
| 10                                                    | Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.               | 50                      |
| 11                                                    | Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt.             | 75                      |
| 12                                                    | Es liegt eine Zahl über 2.                          | 88,888                  |

### Lösungsbeispiele

- A1** Bedingungen 11 und 12 (siehe oben).
- A2** Bedingungen 1 bis 4 (siehe oben).
- A3** Bedingung 6 (siehe oben). Oder: Beide Zahlen sind kleiner als 4.
- B1** Man erhöht die Gewinnchancen, wenn man
- von seinen restlichen Karten diejenige mit der kleinsten Trefferwahrscheinlichkeit aus dem Spiel nimmt,
  - von mehreren möglichen Karten diejenige mit der kleineren Trefferwahrscheinlichkeit einsteckt.
- B2** Das Spiel ist kein reines Glücksspiel, weil es eine Strategie zur Verbesserung der Gewinnchancen gibt.
- Es ist kein reines Strategiespiel, weil die Würfelereignisse dem Zufall unterliegen.
- C1** Siehe Tabelle oben.
- C2** Man zählt (z. B. in einer 6-mal-6-Tabelle) die günstigen Ereignisse. Bei 36 möglichen Ereignissen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, indem man die Anzahl günstiger Ereignisse durch 36 dividiert.

- C3** Bedingung 1: Es liegen 2 Einsen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt  $\frac{1}{6}$  von  $\frac{1}{6}$ .

Bedingung 5: Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar. 5 kombiniert mit 2, 4 oder 6, mit je zwei Reihenfolgen ergibt 6 von 36 Fällen.

Bedingung 6: Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) ist nur die letzte günstig:  $\frac{1}{4}$ .

(Bedingung 7: Es liegt genau eine 6.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$  von  $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ .)

(Bedingung 8: Es liegt mindestens eine 6.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$  von  $\frac{5}{6}$ .)

Bedingung 9: Beide Zahlen sind grösser als 2.  $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}$ .

Bedingung 10: Die Zahlen ergeben eine gerade Summe. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind zwei günstig:  $\frac{1}{2}$ .

Bedingung 11: Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind drei günstig:  $\frac{3}{4}$ .

(Bedingung 12: Es liegt eine Zahl über 2.  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$  von  $\frac{2}{3}$ .)

Die Bedingungen 7, 8 und 12 sind auf dieser Stufe wohl nur durch Abzählen zugänglich.

Bei den Bedingungen 2 bis 4 ist direktes Abzählen naheliegend.

## Umsetzung

### Voraussetzungen

Eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit und Verständnis für diesbezügliche Angaben in Prozent, zwischen 0 % («unmöglich») und 100 % («sicher»).

Wenn es der Gewohnheit entspricht, können die Wahrscheinlichkeiten auch in Bruchform statt in Prozent angegeben werden.



### Zeitbedarf

Ca. 4 Lektionen (je nachdem, wie ausgiebig gespielt wird)

### Material

Vorbereitete Spielkarten (KV 2.1 und 2.2)

Produkte im Mathematikunterricht # Zyklus 3 # 2 – Würfelspiel # Kopiervorlage 2.1

### Würfelspiel

|                                                     |                        |
|-----------------------------------------------------|------------------------|
| Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.               | Es liegt genau eine 6. |
| Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar. |                        |
|                                                     |                        |
|                                                     |                        |
|                                                     |                        |
|                                                     |                        |
|                                                     |                        |

© 2018 – Schulverlag plus AG/Bestandteil von Artikel 88897 Seite 1/1

Produkte im Mathematikunterricht # Zyklus 3 # 2 – Würfelspiel # Kopiervorlage 2.2

### Ereignistafeln – 2 Würfel werfen

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr> </table> | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |  |  |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |

© 2018 – Schulverlag plus AG/Bestandteil von Artikel 88897 Seite 1/1

## Inszenierung

Das Spiel lässt sich mit den drei vorgegebenen Karten versuchsweise zu zweit spielen. Es kann auch im Klassenverband simuliert werden. Dabei können Vermutungen zu Wahrscheinlichkeiten diskutiert – aber nicht bewiesen – werden. Als Beispiel einer Ergänzungskarte kann genannt werden: «Es liegt eine 3 oder eine 4» (Wahrscheinlichkeit 55,555... %). Diese Karte darf dann aber nicht verwendet werden – aber nachgemacht (z. B. «1 oder 6»).

Am Beispiel eines Wurfs zweier Münzen kann die «Ereignismatrix» besprochen werden, evtl. mit der Anregung, diese Darstellung für den Wurf zweier Würfel zu adaptieren. In diesem Fall entwickeln die Schülerinnen und Schüler die 36er-Tafel selber.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | K | Z |
| K | K | K |
| Z | Z | Z |

Je nach Lernstand der Klasse kann es aber auch sinnvoll sein, die 36er-Tafel als Kopiervorlage abzugeben (KV 2.2).

Wichtig: Es ist mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln zu spielen! So wird klar, dass (3 und 4) und (4 und 3) zwei verschiedene Ereignisse sind, dass es aber nur ein Ereignis (5 und 5) gibt.

Es sollte genügend Zeit fürs Spielen eingesetzt werden, damit das Gefühl für Wahrscheinlichkeit gestärkt wird. Bis Vermutungen über theoretische Zusammenhänge entstehen und sich festigen können, müssen viele konkrete Erfahrungen gemacht werden.

## Umgang mit den Produkten

Wenn das Spiel mit den selber entworfenen Karten gespielt wird, sind die Gewinnchancen nicht ausgeglichen, da nicht alle die gleichen Karten haben. Das kann zum Anlass genommen werden, die Karten «nachzubessern». Diese erfüllen dann aber vielleicht die obigen Bewertungskriterien nicht mehr. Darum ist es ratsam, die Erstellung des Produktes von der Wettkampfvariante des Spiels – mit in der Klasse vereinheitlichten Karten – zu trennen.

Das Spiel kann später ergänzt und für weitere Untersuchungen eingesetzt werden:

- Weitere Bedingungskarten
- Spiel mit drei Würfeln
- Statistische Untersuchungen (Zufallsexperimente) und Vergleich der empirischen Ergebnisse mit kombinatorisch hergeleiteten Werten.

